National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2001
Svratka, Czech Republic, May 14 – 17, 2001

AEROELASTIC INSTABILITY OF A SYSTEM WITH NONCONSERVATIVE AND GYROSCOPIC FORCES

Jiří NÁPRSTEK, Stanislav POSPÍŠIL *

Summary: *Slender structures exposed to a cross air flow are prone to vibrations of several types resulting from aeroelastic interaction of a flowing medium and a moving structure. Aeroelastic forces are the origin of nonconservative and gyroscopic forces influencing the stability of a system response. Using a linear mathematical model conditions of a dynamic stability loss and a detailed analysis of a stability domain has been done. Response properties of a system located on a stability boundary together with tendencies in its neighbourhood are presented and interpreted from physical point of view. Results can be used for an explanation of several effects observed experimentally but remaining without theoretical explanation until now.*

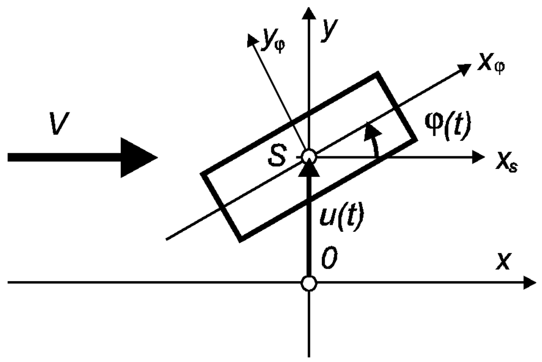
1 Úvod

Štíhlé konstrukce vystavené příčnému proudu vzduchu (mostovky zavěšených mostů, vysoké stožáry, atd.) jsou za určitých okolností náchylné k příčnému rozkmitání typu flutter. Tomuto jevu se věnuje pozornost již několik desítek let, viz např. přehled [1]. Ve velmi rozsáhlé literatuře věnované tomuto tématu však panuje značná terminologická i věcná nejednota, např. [2], [3], která patrně pochází z toho, že se s tímto problémem setkávají nejrůznější technické obory. Některé znaky tohoto aeroelastického jevu jsou však společné všem oblastem, kde se vyskytuje, např. [4], [5]. Tento článek navazuje na příspěvek [6] a je pokusem o teoretický popis jednoho z možných mechanizmů vzniku a parametrů tohoto jevu za podmínek popisu lineárním modelem. Vyznačuje se aeroelastickým spolupůsobením kroutivého a ohybového pohybu za podmínek blízkých vlastních frekvencí obou základních složek, které by na úrovni elastické úlohy fungovaly zcela nezávisle. Omezíme-li se na lineární variantu matematického modelu, omezujeme se pouze na možnost analýzy podmínek vzniku flutteru a odhad některých základních parametrů odezvy v počátečním stádiu růstu odezvy v postkritickém stavu. Nelze takto zkoumat postkritické chování soustavy jako celku, možnost eventuální restabilizace a podmínky překonání energetických barier. Tyto jevy je třeba zkoumat v nelineárním stavu.

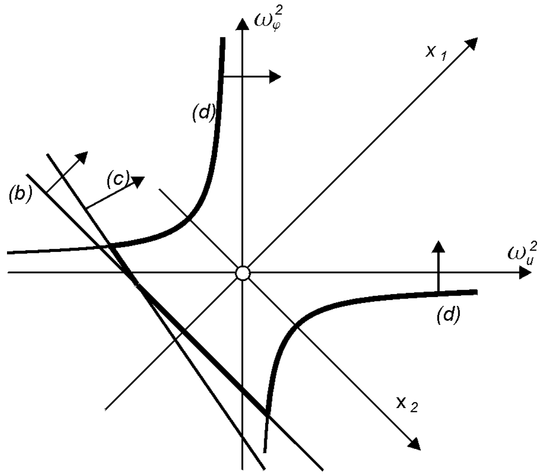
2 Matematický model

Pohyb soustavy idealizujeme soustavou se dvěma stupni volnosti podle obr.1. Tím se kmitání nosníku chápe jako kmitání prutu v prvním ohybovém a prvním kroutivém tvaru. Těžiště obdélníkového průřezu je totožné se středem kroucení, čímž se vylučuje spolupůsobení obou složek pohybu na úrovni lineární pružnosti. Spolupůsobení obou složek je v takovém případě dáno aeroelastickými silami, které mimo příspěvku potenciálním silám vyvolají jednak gyroskopické síly a jednak nekonzervativní síly (obojí popsány antimetrickou maticí). Z experimentálních výsledků

*Ing. Jiří Náprstek DrSc., Ing. Stanislav Pospíšil, PhD., Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR; Prosecká 76, 190 00 Praha 9, e–mail: naprstek@itam.cas.cz, pospisil@itam.cas.cz



Obrázek 1: Schema soustavy



Obrázek 2: Podmínky stability (4a-4d)

je zřejmé, že aeroelastické síly mají sledující charakter a ten je základní příčinou vzniku nekonzervativních vazbových sil. V [6] se tento základní model zkoumal pro dva krajní případy těchto sil: model (i) - nekonzervativní i gyroskopické síly jsou dány doplňkem do pohybových rovnic ve tvaru antimetrických matic, resp. vždy dvou mimodiagonálních členů s opačným znaménkem; model (ii) - účinek nekonzervativních a gyroskopických sil je dán jak v matici tuhosti, tak v matici útlumu vždy pouze jedním z obou mimodiagonálních členů, zatímco druhý je nulový. To znamená, že se při rozkladu matic na symetrickou a antimetrickou část uplatňují jistým dílem i v symetrické části, resp. v diagonálních členech. Ukázalo se, že chování obou těchto modelů má řadu podobných základních znaků, i když z kvantitativního hlediska nejsou rozdíly mezi nimi zanedbatelné a je třeba se jimi i nadále podrobně zabývat.

V této práci se omezíme pouze na model (i), který reaguje na přítomnost nekonzervativních a gyroskopických sil citlivěji. Je popsán soustavou pohybových rovnic:

$$\begin{array}{cccccccc} \ddot{u} & +b_u\cdot\dot{u} & -q\cdot\dot{\varphi} & +\omega_u^2\cdot u & -p\cdot\varphi & = & 0 \\ \ddot{\varphi} & +q\cdot\dot{u} & +b_\varphi\cdot\dot{\varphi} & +p\cdot u & +\omega_\varphi^2\cdot\varphi & = & 0 \end{array} \tag{1}$$

u, φ	–	svislý, resp. otáčivý pohyb průřezu vzhledem těžišti;
b_u, b_φ	–	koeficienty útlumu; na úrovni lineární aproximace jsou tyto hodnoty součtem vnitřního útlumu samotné soustavy a aeroelastických sil; vzhledem k jejich povaze mohou být při větších rychlostech proudu tyto parametry záporné (což může, avšak nemusí vést ke ztrátě stability triviálního řešení);
ω_u, ω_φ	–	"zobecněné" vlastní frekvence ohybové, resp. kroutivé složky pohybu bez tlumení (reálná čísla); na úrovni lineární aproximace se jedná o součet vlastní frekvence v jedné z obou složek pohybu (u, resp. φ) a odpovídající aeroelastické síly; ta je většinou záporná, což může vést k zápornému ω_u^2, nebo ω_φ^2;
q, p	–	koeficienty určující míru vlivu gyroskopické, resp. nekonzervativní síly (vzhledem k jednotkovým hmotnostem); obvykle kladná čísla.

Koeficienty b_u, b_φ jsou součtem vnitřního viskosního tlumení soustavy samotné a diagonální části aeroelastických sil úměrných rychlosti výchylek (za předpokladu lineárního modelu). Aeroelastická část těchto koeficientů je v nejjednodušším případě lineární funkce střední rychlosti proudu V klesající z nuly, resp. stoupajících z nuly. To znamená, že b_u pro jisté V přejde z kladných do záporných hodnot a může být zdrojem nestability typu galloping, zatímco b_φ stále stoupá. Koeficienty ω_u, ω_φ je třeba jako dílčí vlastní frekvence chápat v jistém obecnějším smyslu. O vlastní frekvence obou nezávislých složek se jedná za nepřítomnosti vazbových aeroelastických sil. Koeficient ω_φ je navíc součtem kroutivé vlastní frekvence a klesající kvadratické funkce rychlosti V. Funkcemi V jsou samozřejmě také koeficienty q, p.

Charakteristická rovnice soustavy (1) má tvar:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + b_u\lambda + \omega_u^2 & ; & -q\lambda - p \\ q\lambda + p & ; & \lambda^2 + b_\varphi\lambda + \omega_\varphi^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

odkud po roznásobení dostaneme rovnici čtvrtého řádu:

$$\lambda^4 + \lambda^3(b_u + b_\varphi) + \lambda^2(\omega_u^2 + \omega_\varphi^2 + b_u b_\varphi + q^2) + \lambda(\omega_u^2 b_\varphi + \omega_\varphi^2 b_u + 2qp) + \omega_u^2\omega_\varphi^2 + p^2 = 0 \tag{3}$$

Aby řešení soustavy (1) bylo stabilní, musí mít všechna řešení charakteristické rovnice (3) negativní reálnou část. Polynom na levé straně je úplný a výše uvedené vlastnosti bude tedy mít tehdy, jsou-li splněny Routh-Hurwitzovy podmínky, např. [7]. Ty budou mít v daném případě tvar:

positivní hodnoty koeficientů polynomu (3):

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \alpha_1 = b_u + b_\varphi > 0 \\ \text{(b)} & \alpha_2 = \omega_u^2 + \omega_\varphi^2 + b_u b_\varphi + q^2 > 0 \\ \text{(c)} & \alpha_3 = \omega_u^2 b_\varphi + \omega_\varphi^2 b_u + 2qp > 0 \\ \text{(d)} & \alpha_4 = \omega_u^2\omega_\varphi^2 + p^2 > 0 \end{array} \tag{4}$$

positivní hodnota diskriminantu $\Delta_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_3^2 - \alpha_1^2\alpha_4$:

$$\begin{aligned} \Delta_3 = \; & b_u b_\varphi(\omega_u^2 - \omega_\varphi^2)^2 + (b_u + b_\varphi)(\omega_u^2 b_\varphi + \omega_\varphi^2 b_u)(b_u b_\varphi + q^2) - (b_u + b_\varphi)^2 p^2 + \\ & + [((b_u - b_\varphi)(\omega_u^2 - \omega_\varphi^2) + (b_u + b_\varphi)(b_u b_\varphi + q^2) - 2qp] \cdot 2qp > 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Z podmínek (4) vyplývá, že gyroskopické a nekonzervativní síly q, p se uplatňují v modelu (i), viz (1), samostatně v podmínkách (4b), (4d) a dále ve vzájemné vazbě, (4c). U modelu (ii) je jimi ovlivněna pouze podmínka (4c) a to ve vzájemné vazbě. Podobně se dá posoudit podmínka $\Delta_3 > 0$ podle (3). Zmizí-li tedy jedna ze sil p, q, stane se soustava (1) na těchto silách z hlediska stability nezávislá. To je důvodem vyšší citlivosti modelu (i) zkoumaného v této práci vůči gyroskopickým a nekonzervativním silám.

3 Oblasti stability

Pokusme se o interpretaci podmínek (4), (5) v rovině $(\omega_u^2, \omega_\varphi^2)$, kde je možné názorně demonstrovat oblasti vlastních frekvencí $\omega_u^2, \omega_\varphi^2$, ve kterých je soustava stabilní, resp. nestabilní. Tento způsob znázornění vychází z experimentálně mnohokrát potvrzené skutečnosti, že pro vznik flutteru je nezbytné, aby se vlastní frekvence $\omega_u^2, \omega_\varphi^2$ "příliš nelišily".

Popišme některé vlastnosti podmínek (4), jejichž charakter je patrný z obr. 2. Hranice stability jsou v obou obrázcích znázorněny středně silnou čarou a příslušná šipka označuje tu část roviny, kde je podmínka splněna. Čára označená (d) znamená podmínku (4d), atd. Je zřejmé, že z těchto podmínek apriori nevyplývá, že by pro dosažení stabilního stavu musely hodnoty b_u, b_φ být obě současně kladné. Je-li splněna podmínka (4a), lze si další představu udělat ze zmíněného obrázku. Podmínka (4b) je splněna v polorovině, která leží nad přímkou:

$$\omega_\varphi^2 = -\omega_u^2 - b_u b_\varphi - q^2 \tag{6}$$

Podmínka (4b) je negativně ovlivněna případnou zápornou hodnotou některého z koeficientů b_u, b_φ. Tato podmínka je kladně ovlivněna přítomností gyroskopické síly. Podmínka (4c) vede také k přímkové hranici. Pokud jsou koeficienty b_u, b_φ kladné, má podobnou povahu jako podmínka (4b). Je-li některý z nich záporný, protíná přímka první kvadrant, což vede k požadavku omezení

ω_φ^2 zdola vzhledem k hodnotám ω_u^2. Podmínka (4d) se svým charakterem poněkud liší. Znamená rovnoosou hyperbolu ve druhém a čtvrtém kvadrantu mezi jejímiž větvemi je podmínka splněna. Jeden z parametrů $\omega_u^2, \omega_\varphi^2$ nemusí být kladný. Tato situace je přípustná, pokud jsou zároveň splněny podmínky (4a-4c). Tento stav může reálně nastat při převaze příslušné aeroelastické síly, která by vedla k zápornému ω_φ^2.

Přejdeme k rozboru podmínky (5). Tuto podmínku nejprve upravíme tak, že do ní zavedeme transformaci:

$$\begin{array}{rclcrcl} \omega_u^2 + \omega_\varphi^2 & = & 2x_1 & ; & \omega_u^2 & = & x_1 + x_2 \\ \omega_u^2 - \omega_\varphi^2 & = & 2x_2 & ; & \omega_\varphi^2 & = & x_1 - x_2 \end{array} \tag{7}$$

Dosadíme (7) do (5). Po pracnějších úpravách dostaneme:

$$A_1(x_2 + A_2)^2 + x_1 - A_3 \ > \ 0 \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} A_1 & = & \dfrac{4b_u b_\varphi}{\beta(b_u + b_\varphi)} \ ; \quad A_2 = \dfrac{\beta - 4qp}{8b_u b_\varphi}(b_\varphi - b_u) \ ; \quad \beta = (b_u b_\varphi + q^2)(b_u + b_\varphi) \ ; \\ A_3 & = & \dfrac{[\beta - 4qp]^2(b_\varphi - b_u)^2 + 16b_u b_\varphi[(b_u + b_\varphi)^2 p^2 - 2qp(\beta - 2qp)]}{16b_u b_\varphi \beta(b_u + b_\varphi)} \ . \end{array}\right\} \tag{9}$$

Podmínka (8) představuje v rovině $\omega_u^2, \omega_\varphi^2$ parabolu s osou rovnoběžnou s osou prvního kvadrantu, viz obr. 3, 4. Rozevření a polohu vrcholu paraboly určují jednak parametry útlumu b_u, b_φ a dále parametry q, p charakterizující vliv aeroelastických sil. Stabilní případy jsou vně této paraboly.

Koeficient A_1 je obvykle kladný, takže parabola je otevřena směrem proti ose x_1. Pokud by ovšem byl některý z koeficientů b_u, b_φ záporný, může při nenulové gyroskopické síle q a kladném β, tj. platí-li $q^2 > b_u b_\varphi$ být parabola otevřena směrem do prvního kvadrantu. Tím by podmínka (5) prohlásila za nestabilní všechny případy s vyšší tuhostí než jistá dolní mez, která vychází z polohy vrcholu paraboly daném na ose x_1 parametrem A_3. Pro malé hodnoty útlumu se rozevření při nenulové gyroskopické síle bude blížit k jisté malé konstantě.

Parametr A_2 popisuje u obou modelů posuv paraboly ve směru osy x_2. Tento posuv je popsán především rozdílem útlumů $b_\varphi - b_u$ Z praktického hlediska to znamená, že pásmo nestability, které se bude obvykle vyskytovat v okolí osy x_1 (málo se lišící vlastní frekvence ω_u, ω_φ), se může při výrazně se lišících útlumech přesunout a změnit dosavadní představy o podmínkách vzniku flutteru.

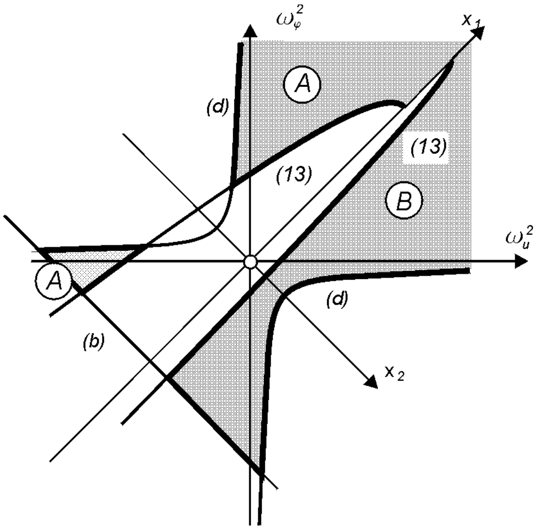
Posuďme speciální případ, kdy v obou složkách odezvy působí stejný útlum, tj. $b_u = b_\varphi = b$. Podmínky (4) se zjednoduší:

$$\begin{array}{cllcl} (a) & b > 0 \ ; & & & b > 0 \\ (b) & \omega_u^2 + \omega_\varphi^2 + b^2 + q^2 > 0 \ ; & & & 2x_1 > -(b^2 + q^2) \\ (c) & (\omega_u^2 + \omega_\varphi^2)b + 2qp > 0 \ ; & \Longrightarrow & & 2x_1 > -2qp/b \\ (d) & \omega_u^2 \omega_\varphi^2 + p^2 > 0 \ ; & & & x_1^2 - x_2^2 > -p^2 \end{array} \tag{10}$$

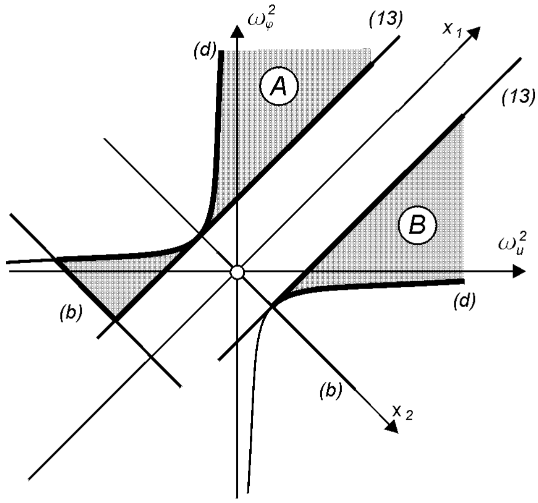
Podmínka (10a) znamená pouze obvyklý požadavek kladného útlumu. Je však třeba stále mít na paměti, že b obsahuje mimo koeficientu vnitřního útlumu soustavy také aeroelastickou sílu, která může být záporná a přivést b do záporných hodnot. V takovém případě by soustava ztratila stabilitu bez ohledu na ostatní podmínky.

Hranice rozdělující kladné a záporné hodnoty podle podmínek (10b), (10c) jsou přímky rovnoběžné s osou x_2. Osu x_1 protínají v záporných hodnotách. Přesto nemusí být a priori splněny, neboť ω_φ^2 může být záporné číslo vlivem aeroelastických sil.

Podmínka (10d) je shodná s (4d) a rozděluje rovinu na stabilní a nestabilní případy rovnoosou hyperbolou, resp. osami $\omega_u^2, \omega_\varphi^2$.



Obrázek 3: Podmínka kladného diskriminantu (5); polorovina nad osou x_1 se týká větších hodnot útlumu b - možnost vzniku "ostrova stability; polorovina pod osou x_1 se týká malých hodnot útlumu.



Obrázek 4: Podmínka kladného diskriminantu (5); případy nulového útlumu; nad osou x_1 nenulová, pod osou x_1 nulová gyroskopická síla.

Koeficienty A_1, A_2, A_3 podle (9) dostanou tvar:

$$A_1 = \frac{1}{b^2 + q^2} \; ; \qquad A_2 = 0 \; ; \qquad A_3 = \frac{p(p - qb)}{b^2} \tag{11}$$

Vzhledem k tomu, že $A_2 = 0$, osa paraboly splývá s osou prvního kvadrantu. Pokud je $b \neq 0, q \neq 0$, potom podle (11) je vždy $A_1 > 0$ a parabola je rozevřena záporným směrem osy x_1.

Rozevření paraboly je tím větší, čím větší je útlum a gyroskopická síla. Vrchol paraboly se posouvá kladným směrem s klesajícím útlumem a s rostoucí nekonzervativní silou. Může naopak ležet na záporné poloose x_1 pokud platí:

$$p < qb \tag{12}$$

S přihlédnutím k (10) znamená takový případ stabilní systém v celém prvním kvadrantu, to jest pro jakoukoli kombinaci $\omega_u^2, \omega_\varphi^2 > 0$.

Není-li podmínka (12) splněna (obvyklejší případ), vnáší parabola:

$$x_1 = -\frac{1}{b^2 + q^2} x_2^2 + \frac{p(p - qb)}{b^2} \tag{13}$$

do oblasti kolem osy prvního kvadrantu úzkou oblast nestability, omezenou nahoře koeficientem A_3, viz obr. 3. V obr. 3, 4 jsou stabilní oblasti vyznačeny šedou výplní, číslo v závorce znamená číslo rovnice popisující znázorněnou křivku, to jest (13). Pro poměrně velký interval rychlostí proudu jsou aerodynamické poměry takové, že podmínky (10) jsou splněny (podkritické rychlosti vzhledem ke gallopingu). Nejcitlivější je právě podmínka (8) popsaná hranicí (13). Z té vyplývá, že při blízkých hodnotách ω_u^2 a ω_φ^2 se soustava může dostat do nestabilního stavu, pokud tyto dva parametry umístí její pracovní bod dovnitř paraboly. Šířka tohoto pásma je dána parametrem A_1 (útlumem a gyroskopickou silou) a horní hranice parametrem A_3 (nekonzervativní silou a útlumem). Jestliže útlum a gyroskopická síla budou velmi malé hodnoty, dá se parabola (13) přibližně popsat dvojicí přímek rovnoběžných s osou prvního kvadrantu, resp. s osou x_1:

$$x_2 = \pm\frac{1}{b}\sqrt{p(p - qb)(b^2 + q^2)} \tag{14}$$

případně při $q = 0$ dvojicí přímek:

$$x_2 = \pm p \tag{15}$$

Tyto dvě přímky se dotýkají hyperboly (10d) ve vrcholech. Šířka pásma nestability kolem osy $x_1$je přesně $2p$. Stabilní pásmo zasahuje mírně do druhého a čtvrtého kvadrantu. To vyplývá z podmínek (10d), (8), viz obr. 4 (oblast $A \rightarrow q \neq 0$; $B \rightarrow q = 0$).

Parabola (13) se může protínat s hyperbolou (10d) pro větší hodnoty útlumu. Je-li současně větší také gyroskopická a nekonzervativní síla, mohou vzhledem k podmínkám (10b), (10c) vzniknout mimo první kvadrant dva "ostrovy" stability, viz obr. 3 (nad osou x_1 - oblast A).

Z posledních dvou poznatků vyplývá, že nekonzervativní síla může za jistých podmínek působit jako stabilizující faktor, ačkoliv je původcem oblasti nestability podél osy x_1.

Odtud vyplývá také teoretické vysvětlení experimentálně známé skutečnosti, že pro vznik ohybově kroutivého flutteru je třeba, aby "ohybová a kroutivá" vlastní frekvence byly blízké hodnoty. S tímto jevem se setkáváme nejčastěji u velkých ocelových mostů. Vyznačují se velmi nízkým vnitřním útlumem, který je stejný v obou složkách odezvy. To znamená, že "parabola nestability" je silně protažena po ose x_1. Závisí také samozřejmě na tvaru průřezu, neboť ten prostřednictvím nekonzervativní a gyroskopické síly ovlivňuje rezevření paraboly.

4 Odhad základních parametrů odezvy

Pokusme se odhadnout frekvenci a vzájemný poměr amplitud a fází obou složek odezvy. Přechodem přes hranici mezi stabilní a nestabilní oblastí změní alespoň jeden kořen charakteristické rovnice (3) znaménko reálné části ze záporného do kladného. Na hranici samotné má reálná část tohoto kořenu nulovou hodnotu. Protože se zároveň komplexní kořeny polynomu s reálnými koeficienty vyskytují pouze v komplexně sdružených dvojicích, dá se na hranici očekávat alespoň jedna dvojice komplexně sdružených ryze imaginárních kořenů. To odpovídá Hopfově bifurkaci. Situace, kdy jeden reálný kořen na hranici změní znaménko, nemůže nastat. Tyto dva kořeny by musely být ve stabilní části okolí hranice záporné a znamenaly by neperiodický zanikající pohyb. To by bylo možné pouze při vhodným způsobem přetlumené soustavě, což není náš případ. O této okolnosti se bude stejně možné dodatečně ještě přesvědčit.

Prakticky nejdůležitější je část hranice, kterou tvoří parabola (5), nebo (13), resp. ta její část, která leží mimo oblast hranic daných podmínkami (4), resp. (10). Na této části hranice budou mít kořeny tuto strukturu:

$$\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}r \qquad ; \qquad \lambda_3 = \overline{\lambda_4} \tag{16}$$

kde r je reálné číslo a λ_3, λ_4 dvojice komplexně sdružených čísel. Vzhledem k (16) můžeme polynom psát ve tvaru:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mathrm{i}r)(\lambda - \mathrm{i}r)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) &= \\ = \lambda^4 - \lambda^3 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda^2 \cdot (\lambda_3\lambda_4 + r^2) &- \lambda \cdot r^2(\lambda_3 + \lambda_4) + r^2\lambda_3\lambda_4\end{aligned} \tag{17}$$

Porovnáme-li koeficienty polynomu (17) a polynomu (3), dostaneme soustavu algebraických rovnic:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(a)} & -(\lambda_3 + \lambda_4) & = & b_u + b_\varphi \\ \text{(b)} & \lambda_3\lambda_4 + r^2 & = & \omega_u^2 + \omega_\varphi^2 + b_u b_\varphi + q^2 \\ \text{(c)} & -r^2(\lambda_3 + \lambda_4) & = & \omega_u^2 b_\varphi + \omega_\varphi^2 b_u + 2qp \\ \text{(d)} & r^2\lambda_3\lambda_4 & = & \omega_u^2\omega_\varphi^2 + p^2 \end{array} \tag{18}$$

Vydělíme rovnici (18c) rovnicí (18a). Odtud ihned dostaneme:

$$r^2 = \frac{\omega_u^2 b_\varphi + \omega_\varphi^2 b_u + 2qp}{b_u + b_\varphi} \tag{19}$$

Dále, z rovnic (18a), (18d) nejprve plyne:

$$-\left(\frac{\omega_u^2\omega_\varphi^2+p^2}{\lambda_4 r^2}+\lambda_4\right)=b_u+b_\varphi \tag{20}$$

Řešením rovnice (20) dostaneme dvojici komplexně sdružených kořenů:

$$\lambda_{3,4}=\frac{1}{2}\left(-(b_u+b_\varphi)\pm 2\mathrm{i}\sqrt{\frac{(\omega_u^2\omega_\varphi^2+p^2)(b_u+b_\varphi)}{\omega_u^2 b_\varphi+\omega_\varphi^2 b_u+2qp}}\right) \tag{21}$$

Vzorec (19) má smysl pouze tehdy, je-li kladný jeho čitatel i jmenovatel, neboť r^2 musí být kladné reálné číslo. Tyto podmínky jsou zřejmě splněny, protože parabolu (3) uvažujeme v prvním kvadrantu v oblasti, kde jsou splněny podmínky (4). Za podmínek, že soustava má nízké tlumení je z těchže důvodů smysluplný také vzorec (21).

Ze struktury (21) je patrné, že λ_3, λ_4 vedou při nehomogenních počátečních podmínkách na parabole (13) a v jejím širokém okolí ve stabilní i nestabilní oblasti na tlumený periodický pohyb, který zaniká s rostoucím časem. Na parabole (13) samotné tedy můžeme očekávat pouze harmonický netlumený pohyb o frekvenci r podle (19). Z tohoto vzorce při $b_u=b_\varphi=b$ vyplývá:

$$r^2=\frac{1}{2}(\omega_u^2+\omega_\varphi^2)+\frac{qp}{b} \tag{22}$$

Za nepřítomnosti nekonzervativní anebo gyroskopické síly je kvadrát frekvence flutteru r^2 roven průměru kvadrátů obou základních vlastních frekvencí $\omega_u^2, \omega_\varphi^2$ a leží tedy mezi nimi. Jsou-li obě dvě síly nenulové, frekvence flutteru stoupá a může významně převýšit obě základní vlastní frekvence. Podobné tvrzení lze vyslovit i v případě, že $b_u \neq b_\varphi$.

Z této analýzy je zřejmé, že na parabole (13) lze očekávat stacionární odezvu:

$$u=D_u\cdot\exp(\mathrm{i}rt) \qquad ; \qquad \varphi=D_\varphi\cdot\exp(\mathrm{i}rt) \tag{23}$$

kde D_u, D_φ jsou neznámá komplexní čísla. Výrazy (23) dosadíme do rovnic (1):

$$\begin{array}{lll} D_u(-r^2+\mathrm{i}rb_u+\omega_u^2)\cdot\exp(\mathrm{i}rt) & -D_\varphi(\mathrm{i}rq+p)\cdot\exp(\mathrm{i}rt) & = 0 \\ D_u(\mathrm{i}rq+p)\cdot\exp(\mathrm{i}rt) & +D_\varphi(-r^2+\mathrm{i}rb_\varphi+\omega_\varphi^2)\cdot\exp(\mathrm{i}rt) & = 0 \end{array} \tag{24}$$

Determinant soustavy (24) je vzhledem k charakteristické rovnici (2) nulový. V tom případě existuje netriviální řešení soustavy (24) pro neznámé D_u, D_φ. Jejich hodnoty jsou až na násobnou konstantu dány příslušnými subdeterminanty:

$$D_u=-r^2+\mathrm{i}rb_\varphi+\omega_\varphi^2 \qquad ; \qquad D_\varphi=-(\mathrm{i}rq+p) \tag{25}$$

Násobná konstanta se může vybrat např. z počátečních podmínek. Fázové úhly θ_u, θ_φ a vzájemný fázový posuv $\theta=\theta_u-\theta_\varphi$ vyplývají ze vzorců:

$$\mathrm{tg}\theta_u=\frac{rb_\varphi}{\omega_\varphi^2-r^2} \quad ; \quad \mathrm{tg}\theta_\varphi=\frac{rq}{p} \quad ; \quad \mathrm{tg}\theta=\frac{\mathrm{tg}\theta_u-\mathrm{tg}\theta_\varphi}{1+\mathrm{tg}\theta_u\mathrm{tg}\theta_\varphi}=\frac{r(pb_\varphi-q\omega_\varphi^2)+r^3q}{\omega_u^2\omega_\varphi^2+r^2(qb_\varphi-p)} \tag{26}$$

Za běžných podmínek se dá očekávat spíše malá reálná část D_u a celkově menší amplituda $|D_u|$ než amplituda $|D_\varphi|$. Za těchto okolností bude soustava kmitat převážně kroutivým pohybem. Také fázový posuv θ_u bude patrně menší než θ_φ a kroucení se bude předbíhat před posuvem. Bude však silně záležet na konkrétní kombinaci parametrů.

Je třeba zdůraznit, že tento rozbor platí pouze na parabole (13). Pokud bychom vstoupili do oblasti nestability (bílé plochy v obr. 3, 4), reálná část kořenů $\lambda_1, 2$ přejde do kladných hodnot. Amplitudy odezvy začnou exponenciálně stoupat a je třeba uvážit vliv nelineárních členů, které rozhodnou o tom, zdali je soustava schopna druhotné stabilizace a na jaké úrovni.

5 Závěr

Použitím jednoduchého lineárního matematického modelu se podařilo popsat mechanizmus vzniku ohybově kroutivého flutteru jakožto jev aeroelastického spolupůsobení ohybového a kroutivého kmitání štíhlého prutu. Tento proces se chápe jako jedna z možných forem ztráty dynamické stability. Ukázalo se, že je nezbytné, aby si vlastní frekvence obou složek pohybu byly blízké (z hlediska průřezových vlastností se uvažuje nezávislý pohyb v ohybové a kroutivé složce). Při nenulovém útlumu se flutteru lze zcela vyhnout při dostatečně velké tuhosti soustavy. Při velkém útlumu nemusí být toto zvýšení tuhosti příliš vysoké, ale vlastní frekvence se mohou více lišit, aby soustava byla stále v nestabilním stavu.

Kromě toho se ukázalo, že při významně se lišících útlumech v obou složkách se oblast nestability může přesunout a zmíněné tendence se výrazně změní. Mimo hlavní, mohou existovat i malé vedlejší oblasti stability. Odtud plyne, že některé typy nekonzervativních a gyroskopických sil mohou mít za jistých okolností stabilizující účinky.

Na parabolické části hranice oblasti stability dochází k harmonickému pohybu jehož frekvence může ležet mezi ohybovou a torzní vlastní frekvencí prutu. Může však ležet mnohem výš nad horní hranicí tohoto intervalu, ačkoliv podmínkou pro vznik tohoto stavu je blízkost obou základních vlastních frekvencí. Za běžných podmínek je amplituda kroutivé složky výrazně vyšší než složky ohybové, jak potvrzují také experimenty. Fázový posuv obou složek odezvy silně závisí na konkrétní sestavě parametrů a nelze říci předem, která složka se bude opožďovat.

6 Poděkování

Práce vznikla za podpory grantů GAČR 103/99/0122 a 103/99/0756. Text byl upraven pomocí procesoru LaTeX.

References

[1] Gowda, B.H.L., Kumar, R.A. Interference effects on the flow-induced vibrations of a square cylinder. Bluff Body Aerodynamics and Applications (H.W. Tieleman edt.), Blacksburg, Virginia, 1996, pp. BIII5-BIII8.

[2] Kaloušek, V., Pirner, M., Fischer, O., Náprstek, J. Wind Effects on Civil Engineering Structures, Elsevier, Amsterdam, 1984.

[3] Simiu, E., Scanlan, R.H. *Wind Effects on Structures*, Wiley, New York, 1984.

[4] Náprstek, J. Nonlinear stability of flutter-type vibration in wind. in: *Proc. 7th Int.Conf. Flow Induced Vibration* (S.Ziada and T.Staubli eds), HTA Luzern, 2000, pp.445-454.

[5] Náprstek, J. Modelling of random aeroelastic stability effects of a slender beam in post-critical state, *Proc. Japan Conference on Structural Safety and Reliability* (S.Sakai and N.Yoshikawa eds), University of Tokyo, Tokyo, 2000, pp.9-16.

[6] Náprstek, J. Flutter instability due to nonconservative and gyroscopic forces. *Proc. Dynamics of Machines* (I.Dobiáš edt.), IT ASCR, Prague, 2001, pp.115-122.

[7] Chetayev, N.G. *Stability of Motion* (in Russian). Nauka, Moscow, 1962.