National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2001
Svratka, Czech Republic, May 14 - 17, 2001

BUCKLING OF SHELLS BY FEM

Ivan Krásný[1], Jan Leština[1], Jiří Plešek[2]

Summary: *There are three suitable methods presented in the paper:*

a) non-linear analyses including the effect of geometric imperfections and nonlinearities; the results are real stability limits,

b) classical (linear) analyses; the results are ideal stability limits which must be reduced by coefficients reflecting the differences between the ideal and real stability limits,

c) linear calculation of static nominal stress; comparisons of these values with proper code allowable stress determine the real stability limits.

Applications of these methods are illustrated by alternative solutions of a cylindrical vessel loaded by external pressure

1. ÚVOD

V příspěvku jsou analysovány tři základní způsoby numerických výpočtů elastické stability skořepin a shrnuty jejich výhody i nevýhody. Jednotlivé alternativy výpočtových postupů jsou ilustrovány na případě jednoduché válcové nádoby s torosférickými dny, zatížené vnějším přetlakem.

2. OBECNÝ NELINEÁRNÍ VÝPOČET (a)

Jeho podstata spočívá v postupném zatěžování skořepiny až do jejího zhroucení, charakterisovaného výrazným nárůstem deformace. Kdy však "výrazný nárůst deformace" nastane, je do značné míry věc konvence a subjektivního názoru. Jeho jistou objektivisaci by bylo lze dosáhnout vztažením okamžité deformace zatížené skořepiny na přípustné meze jejích prvotních odchylek od dokonalého geometrického tvaru; tyto meze jsou často předepisovány v běžně používaných výpočtových normách. Z numerických důvodů přitom tento postup výpočtu stejně musí z imperfekcí tvaru, zatížení, případně i materiálu vycházet. Protože ve stadiu výpočtu stability imperfekce obvykle známy nejsou, je výhodné z jejich normami předepsaných mezních hodnot vyjít, neboť je známo, že na zvolených hodnotách imperfekcí konečný výsledek příliš nezávisí. Jisté numerické potíže působí to, že závislost deformace na zatížení je jednoznačná pouze do dosažení ideální (tzv. horní) meze stability, v technicky zajímavé oblasti již obecně jednoznačná není: k danému zatížení existují obvykle jedna nestabilní a dvě stabilní hodnoty deformace. Výsledkem úplného výpočtu je reálná (tzv. dolní) mez stability a příslušný tvar její ztráty. Ten předem obvykle není znám, proto je žádoucí volit prvotní síť konečných prvků dostatečně jemnou, případně ji po prvých výsledcích výpočtu zjemnit. Z analysovaných metod je obecně tento postup výpočtově nejnáročnější. Přitom je schopen standardně poskytnout jedinou reálnou mez stability s příslušným tvarem; bývá totiž numericky obtížné dostat se "za" tuto mez a snažit se zjistit další (a u tenkostěnných konstrukcí často velmi blízké) meze a tvary.

[1] VAMET s.r.o., Slávy Horníka 16a, 150 00 Praha 5, e-mail Krasny@vamet.cz, Lestina@vamet.cz
[2] Ústav termomechaniky AVČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8, e-mail plesek@it.cas.cz

3. LINEÁRNÍ "BIFURKAČNÍ" VÝPOČET (b)

Skládá se ze dvou etap: klasického statického výpočtu skořepiny se zadaným (nebo jen vhodně zvoleným) zatížením, z nějž vyplynou prvotní napětí, potřebná pro sestavení geometrické matice a následného řešení obecného problému vlastních hodnot s klasickou tuhostní a geometrickou maticí. Ten dá vlastní čísla a jim příslušné tvary ztráty stability. Jednotlivé horní (ideální, bifurkační) meze stability pak plynou ponásobením výchozího zatížení relevantními vlastními čísly. Ideální meze je ještě třeba selektivně (v závislosti na geometrii a zatížení skořepiny) snížit redukčními faktory, známými z literatury i výpočtových norem (např.[2], [3], [4]), což poskytne reálné meze stability. Mlčky se přitom předpokládá, že ideální a reálné tvary ztráty stability se od sebe příliš neliší. Je třeba si uvědomit, že v přiřazení tvaru ztráty stability k redukčnímu faktoru však může být skryt jistý subjektivní faktor. Pro dobré vystižení tvarů ztráty stability je žádoucí jemné dělení skořepiny na prvky. Výpočtový model vychází obvykle z ideálního tvaru, imperfekce není třeba znát, jsou totiž implicitně obsaženy v redukčních faktorech. Hlavní podíl v nárocích na počítač má řešení obecného maticového problému vlastních hodnot. Obvykle je nutno spočíst značný počet (desítky) vlastních hodnot a tvarů. Vlastní hodnoty bývají často násobné nebo velmi blízké, proto je třeba pro jejich určení volit algoritmus necitlivý na tuto skutečnost, např. iterace na podprostoru. Přitom pořadí vlastních čísel - vzhledem k nutné aplikaci redukčních faktorů - ještě neurčuje skutečné pořadí reálné ztráty stability.

4. LINEÁRNÍ STATICKÝ VÝPOČET (c)

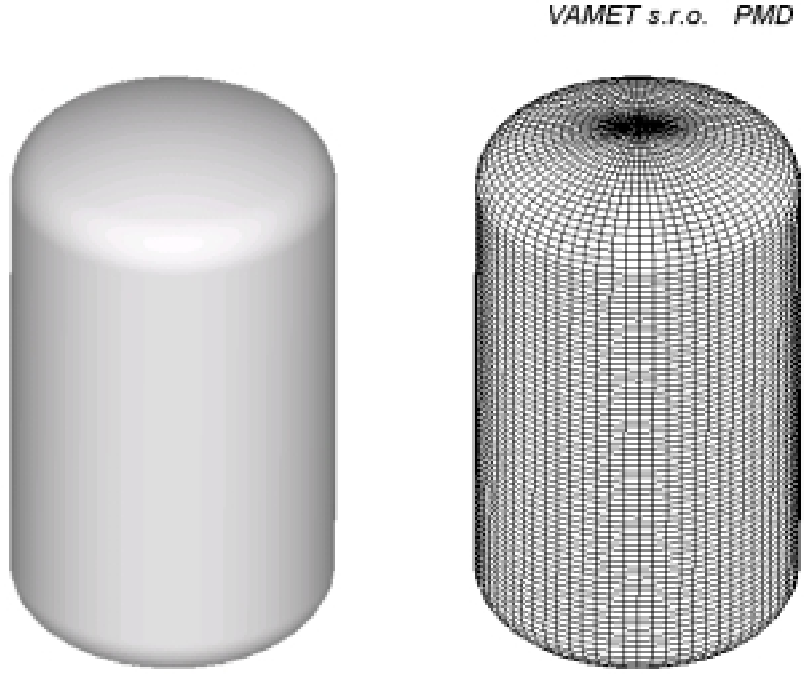
Jde o numericky nejjednodušší postup: metoda konečných prvků se využije pro pouhý statický výpočet skořepiny se zadaným zatížením. Pro další hodnocení je třeba určit jen nominální napětí (např. obvodová a meridiální membránová) relevantních částí skořepiny. Nominální napětí se pak porovnají s přípustnými normovými hodnotami ([2], [3]). Podle typu použité normy lze tak určit reálné (dolní) meze stability (případně s implicitně obsaženou mírou bezpečnosti - [3]), někdy i ideální (horní) meze. Tvary ztráty stability tento postup explicitně neurčuje, pokud by bylo třeba je znát, bylo by nutno použít - nezávisle na výsledcích provedených numerických výpočtů - postupy technických teorií stability skořepin. Výhodou tohoto postupu je, že volba přiměřené hustoty sítě konečných prvků pro pouhý statický výpočet je snadná, metoda je však omezena jen na případy, na něž lze příslušné normy aplikovat. Samozřejmě se obejdeme bez znalostí imperfekcí tvaru a zatížení; ty jsou zahrnuty v přípustných limitech napětí.

5. ILUSTRATIVNÍ PŘÍKLAD

Uvedená problematika byla ilustrována na alternativních výpočtech válcové rotačně symetrické nádoby opatřené torosférickými dny a zatížené vnějším přetlakem. Všechny numerické výpočty byly provedeny vlastním souborem programů metody konečných prvků PMD - [1]. Délka nádoby (včetně den) je ≈3 m, průměr ≈1,5 m, tloušťka válcové skořepiny a anuloidových přechodů 10 mm, kulových vrchlíků 5 mm. Nádoba i síť konečných skořepinových prvků - universální pro postupy b) a c) - jsou znázorněny v obr.1. Geometricky a materiálově nelineární výpočet je v souboru PMD implementován zatím pouze pro prostorové prvky, proto byla pro postup ad a) použita obdobně jemná síť šesti- a pětistěnů. Materiál nádoby je ocel s modulem pružnosti v tahu $E = 2.10^{11}$ Pa a Poissonovým poměrem 0,30. Jde o ilustrativní příklad mírně akademický, neboť technicky reálná nádoba by jistě měla tloušťku celého torosférického dna včetně anuloidových přechodů stejnou. Aby žádný z předem neznámých tvarů ztráty stability nebyl ovlivněn nešetrným předpisem nulových okrajových podmínek ve vybraných uzlech, byla nádoba uložena po obvodu střední partie svých nejtužších částí (tj. anuloidových přechodů) na měkkých pružinách. V dalším textu uvedeme výsledky jednotlivých výpočtových metod se stručným komentářem.

Obecný nelineární výpočet (a)

V obr.2 jsou znázorněny závislosti deformace (tj. posuvu racionálně vybraného uzlu válcové části nádoby, jejíž stabilita je řešena) v závislosti na zatížení (vnějším přetlaku) pro dvě různé velikosti ovalisace, zvolené za prvotní geometrickou imperfekci: hodnoty a = 0,1% resp. 0,7% odpovídají ovalisacím asi 1,5 mm resp. 10 mm. Je vidět, že s rostoucí deformací se velikost zatížení - nezávisle na zvolené hodnotě imperfekce - přibližně asymptoticky blíží k horní (“ideální”) mezi stability 1,30 MPa; pokračování a následný pokles deformační křivky na reálnou (dolní) mez nebyl zatím v rámci souboru PMD implementován. Příslušný tvar ztráty stability (obr.3) má čtyři vlny deformace po obvodě válcové části s jednou podélnou půlvlnou a podstatně se tedy liší (dokonce je ortogonální) k výchozí imperfekci tvaru s dvěma obvodový-

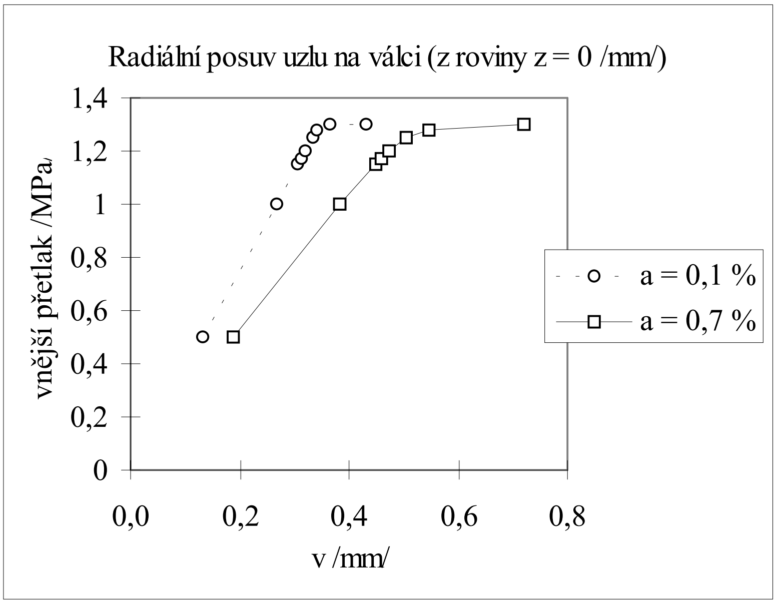


Obr.1. Tvar a síť konečných prvků řešené nádoby.

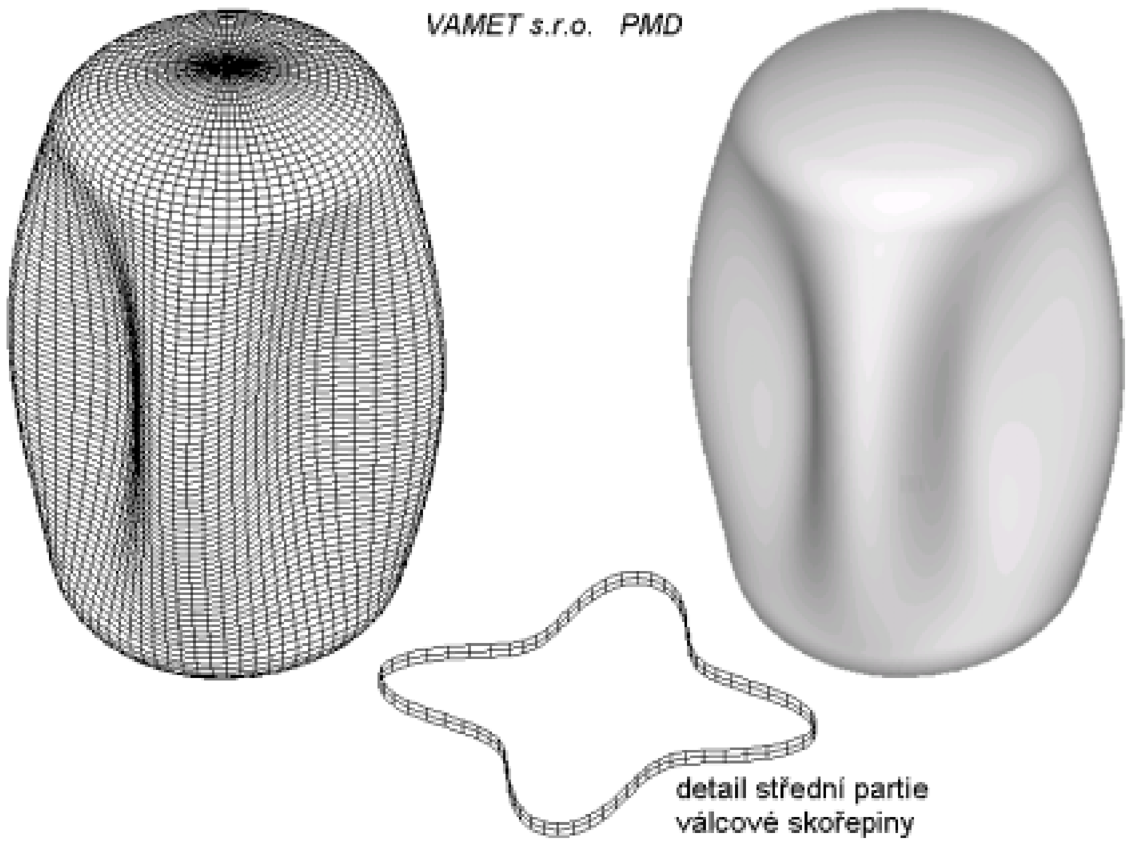
mi vlnami To dokládá příznivou skutečnost: na tvaru a do značné míry i na velikosti prvotních imperfekcí spočtená ideální mez stability prakticky nezávisí. Jistá nevýhoda tohoto způsobu výpočtu je v tom, že zatím dá pouze hodnotu nejnižší ideální meze stability (včetně příslušného tvaru) a neřekne nic o možných dalších blízkých mezích. Obdobně proběhl výpočet ideální meze stability kulového vrchlíku torosférického dna: dal ideální mez 2,60 MPa. Bylo však nutno pro něj modifikovat okrajové podmínky tak, aby šlo opět o nejnižší mez stability nádoby, tj. aby se mez stability válcové části výrazně zvýšila; toho bylo dosaženo dodatečným předpisem nulových posuvů ve střední rovnoběžkové kružnici válcové části. Oba spočtené tvary ztráty stability jsou znázorněny v obr.3 a 4, číselné výsledky jsou obsaženy v tabulce 2, v níž jsou uvedeny i podklady, použité pro určení příslušných redukčních koeficientů.

Lineární bifurkační výpočet (b)

Za prvotní vnější přetlak byla zvolena hodnota 1 MPa. Řešením obecného problému vlastní hodnoty bylo nalezeno 20 vlastních čísel a jim příslušných tvarů ztráty stability. Z tohoto počtu byla prvá tři vlastní čísla “parasitní”, neboť odpovídala pouze uložení nádoby na pružinách. Příslušné vlastní tvary představovaly její natočení jako tuhého celku kolem hlavních souřadných os. Na rozdíl od obdobné základní dynamické úlohy (výpočet vlastních frekvencí a tvarů kmitu řešením problému vlastních hodnot s tuhostní a hmotovou maticí) se zde nevyskytly translační tvary, neboť geometrické matici odpovídají výhradně prvým derivacím posuvů. Bylo tedy spočteno 17 “stabilitně nádoby a jsou tedy dvojnásobná, přehled je uveden v tabulce 1. Vzhledem” platných vlastních čísel, většina z nich odpovídá ztrátě stability válcové části k jednotkové volbě prvotního přetlaku jsou hodnoty vlastních čísel současně číselně rovny ideálním (horním) mezím stability nádoby na vnější přetlak v MPa. Tvary ztráty stability válcové části nádoby lze velmi dobře charakterisovat počty obvodových vln n a podélných půlvln k. Spočtené tvary ztráty stability kulových vrchlíků obou den již tak snadno popsat nelze, připomínají jen jakési “vlnobití”, které se však výrazně liší od rotačně symetrického tvaru ztráty stability, spočteného postupem ad a) - viz obr.4. Připomínáme, že v deformaci nádoby plynoucí z nelineárního výpočtu ad a) je implicitně zahrnuto i její zatížení vnějším přetlakem 1,30 resp. 2,60 MPa. “Očištěný” tvar ztráty stability je proto v levé polovině obr.4 symbolicky dán rozdílem: “tlak+stabilita” minus “jen tlak”. Přes rozdílnost tvarů se ale ideální meze stability, spočtené postupy ad a) a ad b), liší jen málo: 2,60 MPa a 2,78MPa. Odlišnost spočtených tvarů ztráty stability si vysvětlujeme tím, že prvotní napětí, vstupující do bifurkačního výpočtu ad b) prostřednictvím geometrické matice, se v jeho průběhu již nemění, kdežto nelineární postup ad a) na jejich změny průběžně reaguje. Přehled číselných výsledků je uveden v tabulce 2.



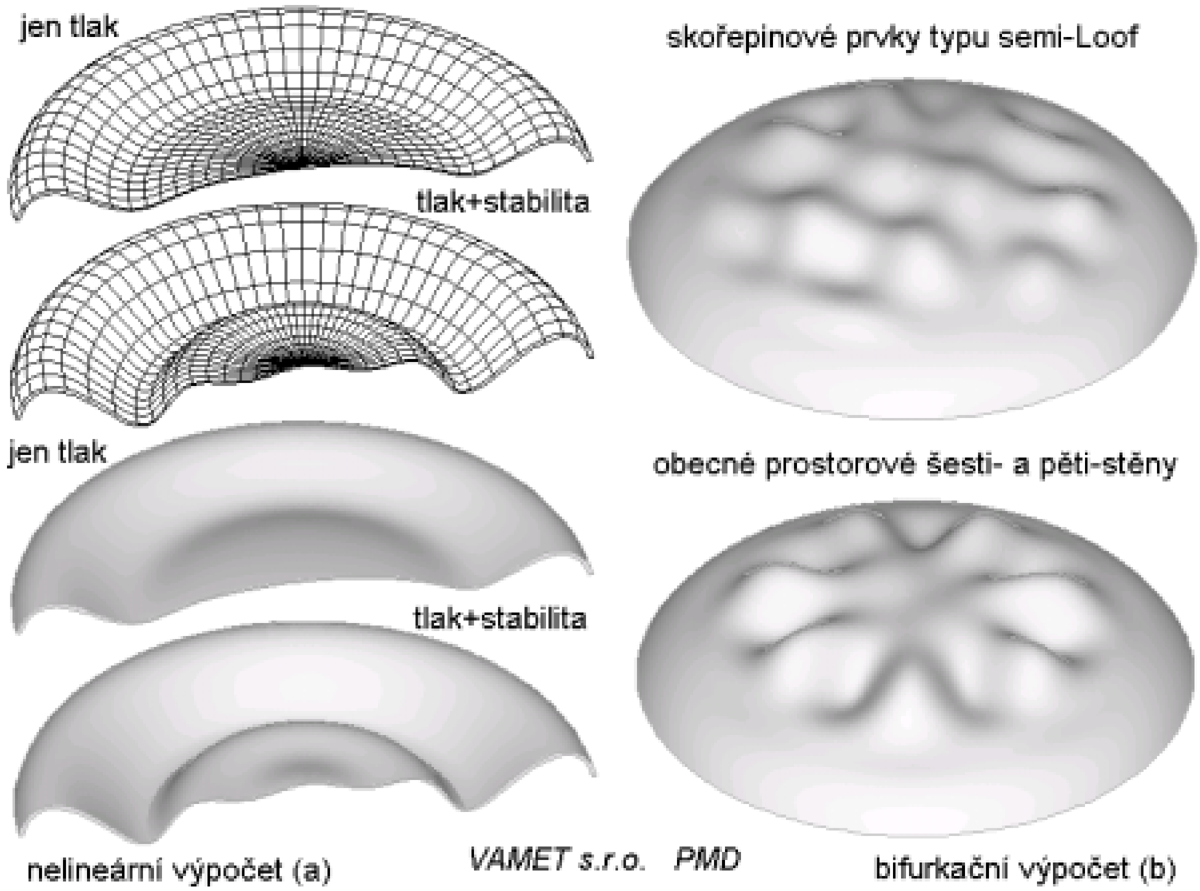
Obr.2. Závislost radiálního posuvu v na vnějším přetlaku



Obr.3. Tvar ztráty stability válcové části nádoby podle výpočtů a), b)

Tabulka 1. Vlastní čísla a tvary ztráty stability: n = obvodové vlny, k = podélné půlvlny

pořadí	vlastní číslo	tvar ztráty stability				poznámka
		válcový plášť	n	k	dno	
1	1,319	+	4	1	-	ztráta stability pouze válcového pláště
2	1,319	+	4	1	-	
3	1,344	+	5	1	-	
4	1,344	+	5	1	-	
5	1,745	+	6	1	-	
6	1,745	+	6	1	-	
7	2,302	+	7	1	-	
8	2,302	+	7	1	-	
9	2,589	+	6	2	(+)	+ nepatrná deformace den
10	2,589	+	6	2	(+)	
11	2,782	+	7	2	+	ztráta stability válcového pláště i obou den
12	2,790	+	7	2	+	
13	3,000	+	8	1	+	
14	3,016	+	8	1	+	
15	3,313	-	-	-	+	ztráta stability pouze obou den
16	3,322	(+)	≈3	≈1	+	+ nepatrná deformace válcového pláště
17	3,330	(+)	≈3	≈1	+	



Obr.4. Deformace a tvary ztráty stability kulového vrchlíku dna z výpočtů a) a b)

Lineární statický výpočet (c)

Ve zvoleném jednoduchém ilustrativním případě je tento postup triviální, neboť potřebná nominální napětí lze určit analyticky bez jakéhokoliv “prvkového” výpočtu. Proto zde také vede k týmž výsledkům, jako použitá norma ([2]). Praktického významu však nabývá např. u nádob složitějších tvarů (s hrdly, průlezy), obecněji zatížených, např. vystavených stacionárním i nestacionárním teplotním napětím. Domníváme se, že právě v takových případech je vhodné - aspoň jako úvodní prvý krok postupu - provést pouhé statické řešení, u nějž ve většině případů vystačíme s diskretisací skořepinovými prvky a poměrně hrubou sítí. Potřebná relevantní nominální napětí lze obvykle nejjednodušeji určit z vnitřních reakcí ve vhodně zvolených řezech.

6. SHRNUTÍ

Souhrnný přehled číselných výsledků, spočtených všemi uvedenými postupy, je v tabulce 2, v jejímž druhém řádku je symbolicky označena použitá alternativa postupu výpočtu (a, b, c) doplněná odkazem na seznam použité literatury. Za povšimnutí stojí, že meze stability válcové části jsou podle normy [2] asi o 15% nižší, než hodnoty, vycházející z numerických výpočtů metodou konečných prvků. Domníváme se, že dominantní příčinou tohoto rozdílu je příliš konservativně stanovená délka válcové části, k níž se v [2] i [3] připočítává třetina hloubky torosférických den. Přitom již z historické práce [5] lze vyvodit, že dna válcové nádoby mají ve velké většině praktických případů účinek spíše vyztužující, než “změkčující”. Závěrem lze konstatovat, že všechny tři popsané postupy jsou dnes ve výpočtářské praxi dobře použitelné a že dávají výsledky aspoň přibližně ekvivalentní.

Tabulka 2. Výsledné ideální a reálné meze stability nádoby na vnější přetlak [MPa]

část nádoby	ideální přetlak				reálný přetlak			
↓ výpočet→	a/[1]	b/[1]	c/[2]	[2]	a/[1]/[2]	b/[1]/[2]	c/[2]	[2]
válcová skořepina	1,30	1,32	1,12	1,12	0,81	0,82	0,70	0,70
dno - kulový vrchlík	2,60	2,78	2,67	2,67	0,39	0,42	0,40	0,40

LITERATURA

[1] Abstrakt výpočtového systému metody konečných prvků PMD

[2] Normativně technická dokumentace A.S.I. Hodnocení pevnosti zařízení a potrubí jaderných elektráren typu VVER, sekce III, Praha/Brno, květen 1996

[3] ČSN 69 0010 - Tlakové nádoby stabilní, technická pravidla, výpočet pevnosti. Část 4.5: Válcové části nádob, část 4.7: Klenutá dna nádob

[4] Seide P., Weingarten V., Masri S.: NUREG/CR-0273 Buckling Kriteria and Application of Criteria to Design of Steel Containment Shell. Final Report, January 1978 - March 1979

[5] Machnig O., Handke P.: Zur Stabilität zylindrischer Behälter mit Halbkugelboden unter Aussendruck. Stahlbau, Bd.34, Hft 4, April 1965, pp.119-123