



SOME PROBLEMS OF DYNAMICAL AND ACOUSTICAL BEHAVIOUR OF TUBE BUNDLES

Hynek KLÁŠTERKA*

Summary: *The most of heat exchangers is composed of a large number of tubes, which are regularly arranged. The system of tubes is flowed through by fluid and flowed round by another fluid. Besides the problem of heat transfer it is necessary to solve the dynamic and acoustic phenomena, that can raise unfavourable affects during the operation of such equipments. This article deals with the idea of asymptotic homogenization method. Three homogenization equations are derived. Equations describing various cases of acoustic wave propagation are analysed, and corresponding equations expressing equivalent sound speed are referred too.*

1. ÚVOD

Většina tepelných výměníků sestává z velkého množství trubek, obvykle pravidelně uspořádaných. Vnitřkem trubek proudí jedna tekutina, jiná tekutina proudí vně trubek. Soustava trubek je obtékána buď příčně, nebo podélně. Kromě problematiky přenosu tepla je třeba se už při konstrukčním návrhu zabývat dynamickými a akustickými jevy, které by mohly nepříznivě ovlivnit provoz těchto zařízení. Jedná se především o určení meze stability trubkového svazku, tj. určení tzv. kritické rychlosti obtékání trubek, při které dojde k náhlému zvětšení amplitud výchylek kmitajících trubek. Tyto jevy jsou spojeny se zvýšením intenzity hluku. Zdrojem hluku mohou být tzv. Strouhalovy tóny (frekvence odtrhávání vírů je shodná s vlastní frekvencí kmitání trubek). Velmi nebezpečným jevem je např. rezonanční kmitání celé soustavy (tekutina, trubky, plášť výměníku) vlivem stojatého vlnění. Při vyšetřování dynamických a akustických vlastností takového složitého systému (systém s periodickou strukturou) je rozumné nepřihlížet k lokálním mechanickým vlastnostem, ale naopak k homogenizovaným vlastnostem celého systému. Zde naznačíme základní myšlenku homogenizace a odvodíme vztah pro rychlost zvuku v homogenizovaném prostředí. Ekvivalentní rychlost zvuku je velmi důležitým parametrem pro výpočty akustických rezonancí.

* Ing. Hynek Klášterka, CSc., ŠKODA VÝZKUM s.r.o., Tylova 57, 316 00 Plzeň, tel. 019/7044893, fax 019/533358, e-mail: hklasterka@vyz.ln.skoda.cz

2. ZÁKLADNÍ ROVNICE

Kmitání elastického tělesa ve vazké tekutině metodou homogenizace je obecně řešeno v [1]. Vzhledem k tomu, že se zde budeme zabývat úlohou akustiky trubkového výměníku tepla, můžeme podobně jako u většiny akustických úloh, uvažovat nevazkou stlačitelnou tekutinu [2], [3]. Trubky budeme považovat za štíhlé nosníky z lineárně elastického materiálu. Soustavu souřadnic $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ zvolíme tak, že osa x_3 je totožná s osami trubek. Výchylinky trubek jsou malé a způsobí pouze malé rozruchy v tekutině, takže lze pohybové rovnice tekutiny linearizovat.

Rovnice pro elastickou strukturu

Uvažujeme obecné elastické těleso. Pohybovou rovnici můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\rho_s \ddot{w}_i = \nabla_j \sigma_{ij} + F_i, \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}, \quad \varepsilon_{kh} = \frac{1}{2} (\nabla_h w_k + \nabla_k w_h), \quad (2.2)$$

kde ρ_s je měrná hmotnost, σ_{ij} je tenzor napětí, F_i je vnější síla, $\nabla_h = \frac{\partial}{\partial x_h}$, pro koeficienty a_{ijkh} platí podmínky symetrie:

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{jihk} = a_{khij}. \quad (2.3)$$

1. ROVNICE PRO TEKUTINU

$$\dot{\rho}_f^e + \bar{\rho}_f^e \nabla_i u_i^e = 0, \quad (2.4)$$

$$\bar{\rho}_f^e \dot{u}_i = G_i^e - \nabla_i p^e, \quad (2.5)$$

$$\dot{p}^e = (c_f^e)^2 \dot{\rho}_f^e, \quad (2.6)$$

kde pruh nad veličinou značí střední hodnotu, c_f je rychlost zvuku v tekutině, p je tlak. Pro tekutinu uvnitř trubek je index $e=1$, pro tekutinu vně trubek je $e=2$. Tento index budeme dále vypouštět.

Okrajové podmínky pro povrch trubek (rozhraní mezi trubkou a tekutinou):

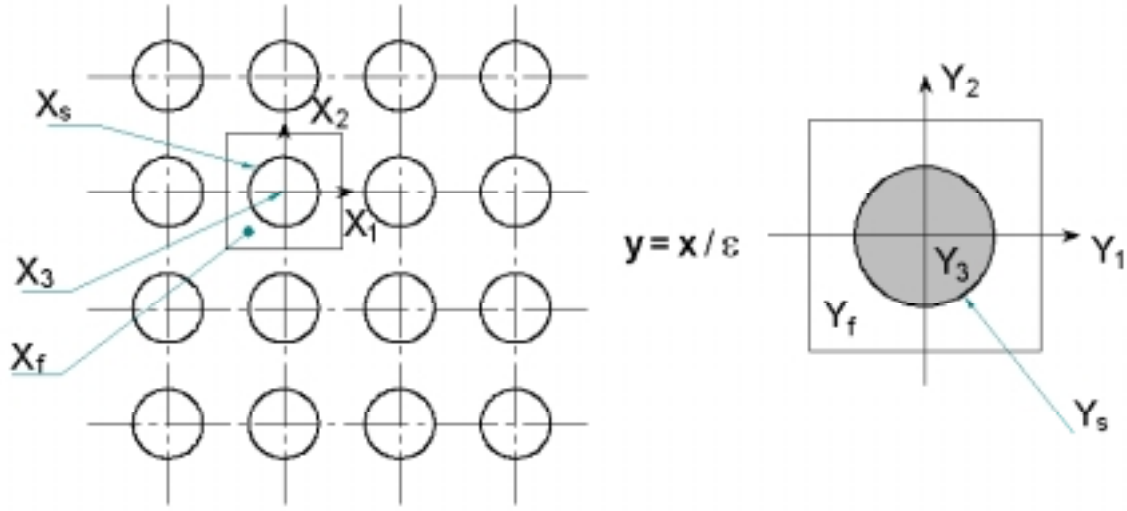
$$\sigma_{\alpha\beta} n_\beta = -p n_\alpha, \quad (2.7)$$

$$u_\alpha n_\alpha = \dot{w}_\alpha n_\alpha. \quad (2.8)$$

Dále poznamenejme, že indexy psané latinkou ($i, j, \dots$) nabývají hodnot 1, 2, 3, indexy vyjádřené symboly řecké abecedy ($\alpha, \beta, \dots$) nabývají hodnot 1 a 2.

3. HOMOGENIZACE

Uvažujeme svazek trubek periodicky uspořádaných dle obr. 1



Obr. 1. Svazek trubek, jednotková buňka, soustava souřadnic

Uvnitř trubek proudí tekutina o měrné hmotnosti ρ_f^1 , vně proudí tekutina o měrné hmotnosti ρ_f^2 , měrná hmotnost materiálu trubek je ρ_s . Jedná se tedy o nehomogenní anizotropní prostředí s periodickou strukturou. Vliv kapaliny uvnitř trubek lze obvykle zahrnout zvětšením hmotnosti trubek o hmotnost kapaliny, která je uvnitř. Budeme tedy uvažovat pouze dynamické účinky vnější tekutiny o měrné hmotnosti $\rho_f^2 = \rho_f$. Celou oblast (řez kolmý na osu trubek) rozdělíme na soustavu identických buněk.

Zavedeme lokální soustavu souřadnic $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Od soustavy souřadnic $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ přejdeme k lokální soustavě souřadnic použitím vztahu

$$y_\alpha = \frac{x_\alpha}{\varepsilon}, \quad (\alpha = 1, 2, \quad \varepsilon \ll 1), \quad (3.1)$$

kde ε je malý parametr, který je dán poměrem velikosti jednotkové buňky k velikosti celé oblasti. Dále definujeme operátor “ustřednění”

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{|Y|} \cdot \int_Y \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad (3.2)$$

kde Y je periodická funkce.

Provedeme rozvoj funkcí vystupujících v rovnicích (2.1) – (2.6) podle malého parametru ε :

$$\phi^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \phi^0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \phi^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \dots \quad (3.3)$$

Dosadíme-li (3.3) do základních rovnic (2.1) – (2.6) popisujících řešení dané úlohy, pak s uvážením (3.2) bude platit:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(0)} = -p^{(0)}(x, t) \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.4)$$

$$u_{\alpha}^{(0)} = \varphi_{\alpha\beta} \tilde{u}_{\beta}^0 + \psi_{\alpha\beta} \dot{w}_{\beta}^{(0)}, \quad (3.5)$$

kde pro koeficienty $\varphi_{\alpha\beta}$ a $\psi_{\alpha\beta}$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta, \alpha} &= 0, \\ \varphi_{\alpha\beta} n_{\alpha} &= 0, \\ \tilde{\varphi}_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\alpha\beta} &= 0, \\ \psi_{\alpha\beta} n_{\alpha} &= n_{\beta}, \\ \tilde{\psi}_{\alpha\beta} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

kde $\varphi_{\alpha\beta}$ i $\psi_{\alpha\beta}$ jsou periodické funkce y .

Pro první aproximaci tlaku $p^{(1)}$ platí následující vztahy:

$$p_{, \alpha\alpha}^{(1)} = 0, \quad (3.8)$$

$$p_{, \alpha}^{(1)} n_{\alpha} = -(\nabla_{\alpha} p^{(0)} + \bar{\rho}_f \ddot{w}_{\alpha}^{(0)}) n_{\alpha}, \quad (3.9)$$

$$p^{(1)} = -\chi(y) (\nabla_{\alpha} p^{(0)} + \bar{\rho}_f \ddot{w}_{\alpha}^{(0)}) + \tilde{p}^{(1)}(x, t), \quad (3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_{\alpha, \beta\beta} &= 0, \\ \chi_{\alpha, \beta} n_{\beta} &= n_{\alpha}, \\ \tilde{\chi}_{\alpha} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

přičemž χ_{α} je periodickou funkcí y . Zde jsme označili $(\)_{, \alpha} = \frac{\partial(\)}{\partial y_{\alpha}}$ a zanedbali jsme setrvačné síly

F_{α} a G_{α} .

3.1 Homogenizované rovnice

Teorii homogenizace uvedenou v kap. 3 budeme nyní aplikovat na základní rovnice soustavy (2.1) – (2.6).

Vyjdeme z rovnice kontinuity (vně trubek), provedeme rozklad podle malého parametru ε a použijeme operátor (3.2). Po úpravě dostaneme:

$$\gamma \dot{p}_f^{(0)} + \bar{\rho}_f \left(\nabla_i \tilde{u}_i^{(0)} + \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} u_{\alpha,\alpha}^{(1)} dy \right) = 0, \quad (3.12)$$

$$\text{kde } \gamma = \frac{|X_f|}{|X|} = \frac{|Y_f|}{|Y|}, \quad (3.13)$$

$$\int_{Y_f} u_{\alpha,\alpha}^{(1)} dy = \int_{\Gamma} u_{\alpha}^{(1)} n_{\alpha} dl = \int_{\Gamma} \dot{w}_{\alpha}^{(1)} n_{\alpha} dl = - \int_{Y_s} \dot{w}_{\alpha,\alpha}^{(1)} dy = \int_{Y_s} \left(\frac{\dot{\rho}_s^{(0)}}{\bar{\rho}_s} + \nabla_i \dot{w}_i^{(0)} \right) dy. \quad (3.14)$$

Jestliže budeme uvažovat čistě ohybové kmitání trubky, můžeme psát

$$\int_Y \nabla_3 w_3^{(0)} dy = \int_{Y_s} \varepsilon_{33}^{(0)} dy = 0. \quad (3.15)$$

Dosaďme-li tuto podmínku do (3.12) a použijeme-li vztah mezi tlakem a měrnou hmotností $\dot{p}^{(0)} = c_s^2 \rho_s^{(0)}$, dostáváme tzv. **první homogenizovanou rovnici**:

$$\left(\frac{\gamma}{c_f^2} + \frac{1-\gamma}{c_s^2} \cdot \frac{\bar{\rho}_f}{\bar{\rho}_s} \right) \ddot{p}^{(0)} - \gamma \nabla_3 \nabla_3 p^{(0)} - \bar{\rho}_f \nabla_{\alpha} [\dot{\tilde{u}}_{\alpha}^{(0)} + (1-\psi) \ddot{w}_{\alpha}^{(0)}]. \quad (3.16)$$

Nyní zvolíme stejný postup, ale místo rovnice kontinuity použijeme pohybovou rovnici. Tlak vyjádříme ve tvaru (3.10). Dostáváme tak **druhou homogenizovanou rovnici**:

$$\bar{\rho}_f |X| \dot{\tilde{u}}_{\alpha}^{(0)} = -A_{\alpha\beta} \nabla_{\beta} p^{(0)} + \bar{\rho}_f D_{\alpha\beta} \ddot{w}_{\beta}^{(0)}, \quad (3.17)$$

$$\text{kde } D_{\alpha\beta} = \frac{|X|}{|Y|} \cdot \int_{Y_f} \chi_{\beta,\alpha} dy, \quad (3.18)$$

$$A_{\alpha\beta} = |X_f| \delta_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta}. \quad (3.19)$$

Nakonec odvodíme třetí homogenizovanou rovnici. Základem je pohybová rovnice elastické struktury (trubky):

$$\int_{Y_s} \left(-\nabla_{\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - \nabla_3 \sigma_{\alpha 3}^{(0)} + \bar{\rho}_s \ddot{w}_{\alpha}^{(0)} \right) dy - \int_{Y_f} p_{,\alpha}^{(1)} dy = 0. \quad (3.20)$$

Použijeme vztahů (3.4), (3.10), (3.18) a (3.20) a po úpravě dostaneme:

$$M_{\alpha\beta} \ddot{w}_{\beta}^{(0)} + B_{\alpha\beta} \nabla_{\beta} p^{(0)} - \frac{|X_s|}{|Y_s|} \int_{Y_s} \nabla_3 \sigma_{3\alpha}^{(0)} dy = 0, \quad (3.21)$$

$$\text{kde} \quad M_{\alpha\beta} = \bar{\rho}_s |X_s| \delta_{\alpha\beta} + \bar{\rho}_f D_{\alpha\beta}, \quad (3.22)$$

$$B_{\alpha\beta} = |X_s| \delta_{\alpha\beta} + D_{\alpha\beta}. \quad (3.23)$$

Poslední člen v rovnici (3.21) lze upravit následujícím způsobem:

$$|X_s| \nabla_3 \left(\frac{1}{|Y_s|} \int_{Y_s} \sigma_{3\alpha}^{(0)} dy \right) = |X_s| \nabla_3 \left(\frac{T_{\alpha}^{(0)}}{|X_s|} \right) = -\nabla_3 \nabla_3 (EI \nabla_3 \nabla_3 w_{\alpha}^{(0)}), \quad (3.24)$$

kde $T_{\alpha}^{(0)}$ je střední hodnota tečného napětí. Vzhledem k tomu, že uvažujeme štíhlé trubky (nosníky), můžeme tuto veličinu vyjádřit pomocí ohybové tuhosti EI . Konečný tvar **třetí homogenizované rovnice** pak bude

$$M_{\alpha\beta} \ddot{w}_{\beta}^{(0)} + \nabla_3 \nabla_3 (EI \nabla_3 \nabla_3 w_{\alpha}^{(0)}) = -B_{\alpha\beta} \nabla_3 p^{(0)}. \quad (3.25)$$

Člen $(-B_{\alpha\beta} \nabla_3 p)$ na pravé straně rovnice (3.25) vyjadřuje účinek okolní tekutiny na příčné kmitání trubky.

Dostali jsme soustavu tří homogenizovaných rovnic (3.16), (3.17) a (3.25). Z rovnic (3.16) a (3.17) můžeme vyloučit $\tilde{u}_{\alpha}^{(0)}$. Soustava tří homogenizovaných se pak zredukuje na dvě rovnice, rovnici (3.25) a (3.26).

$$|X| \left(\frac{\gamma}{c_f^2} + \frac{1-\gamma}{c_s^2} \frac{\bar{\rho}_f}{\bar{\rho}_s} \right) \ddot{p}^{(0)} - \nabla_{\alpha} (A_{\alpha\beta} \nabla_{\beta} p^{(0)}) - |X_f| \nabla_3 \nabla_3 p^{(0)} = -\bar{\rho}_f \nabla_{\alpha} (B_{\alpha\beta} \ddot{w}_{\beta}^{(0)}). \quad (3.26)$$

Na rovnici (3.25) můžeme pohlížet jako na rovnici popisující kmitání trubek vybuzené účinkem vnějšího tlakového pole, na rovnici (3.26) můžeme pohlížet jako na rovnici popisující kmity tlakového pole, vybuzené kmitáním trubek.

4. EKVIVALENTNÍ RYCHLOST ZVUKU

Nejdříve budeme chtít vyšetřit rychlost zvuku, tj. rychlost šíření malých tlakových poruch v trubkovém svazku v **axiálním směru**. Použijeme k tomu rovnici (3.26), ve které položíme derivace podle x_{α} rovné nule. Rovnice (3.26) se pak zredukuje na tvar

$$\ddot{p}^{(0)} - \frac{4\gamma}{\frac{\gamma}{c_f^2} - \frac{1-\gamma}{c_s^2} \frac{\bar{\rho}_f}{\bar{\rho}_s}} \cdot \nabla_3 \nabla_3 p^{(0)} = 0. \quad (4.1)$$

Kromě toho je třeba, aby výchylky $w_\alpha^{(0)}$ byly nulové. Je tedy třeba ještě položit $\bar{\rho}_s \rightarrow \infty$. Rovnice (4.1) pro šíření malých poruch v axiálním směru bude,

$$\ddot{p}^{(0)} - c_f^2 p^{(0)} = 0. \quad (4.2)$$

Rychlost šíření, tj. rychlost zvuku v axiálním směru je tedy c_f .

Nyní budeme chtít vyšetřit rychlost zvuku v rovině kolmé na osu trubek. Z rovnice (3.26) je třeba vypustit člen $|X_f| \nabla_3 \nabla_3 p^{(0)}$. Existují pouze dva případy, kdy rovnice (3.25) a (3.26) popisují šíření tlakových poruch v rovině kolmé na osu trubek, tj. ve dvou směrech $\alpha = 1$ a $\alpha = 2$.

a) Trubky neklmitají

Uvažujeme model šíření tlakových poruch pro případ, že trubky neklmitají, jsou v klidu, takže $\ddot{w}_\alpha^{(0)} = 0$. Tlakové pole pak bude mít tvar

$$|X| \left(\frac{\gamma}{c_f^2} + \frac{1-\gamma}{c_s^2} \cdot \frac{\bar{\rho}_f}{\bar{\rho}_s} \right) \ddot{p}^{(0)} - A_{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\alpha p^{(0)} = 0, \quad (4.3)$$

index α není sčítacím indexem. Ekvivalentní rychlost zvuku ve směru kolmém na osu trubek, tj. ve směru $\alpha = 1$, nebo $\alpha = 2$, za předpokladu, že trubky neklmitají, je

$$c_{ekv}^{(\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{\frac{\gamma}{c_f^2} - \frac{1-\gamma}{c_s^2} \frac{\bar{\rho}_f}{\bar{\rho}_s}} (\gamma - d_\alpha)}, \quad (4.4)$$

kde $d_\alpha = D_{\alpha\alpha} / |X|$. Jestliže $\bar{\rho}_s \rightarrow \infty$, dostaneme

$$c_{ekv}^{(\alpha)} = c_f \sqrt{1 - \frac{d_\alpha}{\gamma}}. \quad (4.5)$$

b) Trubky klmitají ve fázi

Jestliže ze soustavy rovnic (3.25) a (3.26) eliminujeme $\ddot{w}_\alpha^{(0)}$, dostaneme rovnici vyjadřující šíření tlakových poruch ve směru $\alpha = 1$, nebo $\alpha = 2$:

$$|X| \left(\frac{\gamma}{c_f^2} + \frac{1-\gamma}{c_s^2} \cdot \frac{\bar{\rho}_f}{\bar{\rho}_s} \right) \ddot{p}^{(0)} - \left(A_{\alpha\alpha} + \bar{\rho}_f \frac{B_{\alpha\alpha}^2}{M_{\alpha\alpha}} \right) \nabla_\alpha \nabla_\alpha p^{(0)} = \bar{\rho}_f \frac{B_{\alpha\alpha}}{M_{\alpha\alpha}} \nabla_\alpha (\nabla_3 \nabla_3 EI \nabla_3 \nabla_3 w_\alpha^{(0)}), \quad (4.6)$$

index α není sčítacím indexem. Jestliže bude $\nabla_\alpha (\nabla_3 \nabla_3 EI \nabla_3 \nabla_3 w_\alpha^{(0)}) = 0$, znamená to, že na všechny trubky působí stejné zatížení, nebo že mód (tvar kmitu) všech trubek je stejný. Jinými slovy,

trubky kmitají ve fázi. Ekvivalentní rychlost zvuku ve směru kolmém na osu trubek, tj. ve směru $\alpha = 1$, nebo $\alpha = 2$, za předpokladu, že trubky kmitají ve fázi je

$$c_{ekv}^{(\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{\frac{\gamma}{c_f^2} + \frac{1-\gamma}{c_s^2} \frac{\bar{\rho}_f}{\bar{\rho}_s}} \cdot \frac{1}{|X|} \left(A_{\alpha\alpha} + \bar{\rho}_f \frac{B_{\alpha\alpha}^2}{M_{\alpha\alpha}} \right)} \quad , \quad (4.7)$$

index α není sčítacím indexem. Rovnici (4.6) lze též vyjádřit ve tvaru

$$c_{ekv}^{(\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{\frac{\gamma}{c_f^2} + \frac{1-\gamma}{c_s^2} \frac{\bar{\rho}_f}{\bar{\rho}_s}} \cdot \left[\gamma - d_\alpha + \frac{(1-\gamma + d_\alpha)^2}{(1-\gamma) \frac{\bar{\rho}_f}{\bar{\rho}_s} + d_\alpha} \right]} \quad (4.8)$$

Jestliže $\bar{\rho}_s \rightarrow \infty$, pak vztah (4.8) přejde v (4.5).

5. ZÁVĚR

Článek se zabývá teoretickými otázkami šíření akustických vln trubkovým svazkem a metodou výpočtu akustických vibrací na základě homogenizace. Využívá se toho, že soustava trubek, uvnitř protékaných jednou tekutinou a příčně nebo podélně obtékaných jinou tekutinou, tvoří systém s periodickou strukturou. Abychom vyšetřili dynamické vlastnosti takového složitěho systému, je rozumné nepřehlížet k lokálním mechanickým vlastnostem, ale naopak k homogenizovaným vlastnostem celého systému. Zde je naznačena základní myšlenka homogenizace a odvozeny vztahy pro rychlost zvuku v homogenizovaném prostředí. Tato veličina je důležitým parametrem pro další výpočty, např. pro výpočty vlastních frekvencí rezonančního kmitání celé soustavy. Metoda homogenizace se též uplatňuje při dalších výpočtech, např. výpočtech přídavných hmotností.

Práce vznikla za finanční podpory GAČR, v rámci grantu č. 101/99/1070.

LITERATURA

- [1] Sanchez – Palencia, E.: *Non – Homogeneous Media and Vibration Theory*. Lecture Notes in Physics, 127. Springer – Verlag, Berlin, 1980.
- [2] Zhang, R. J.: *A Unified 3-D Homogenization Model of Beam Bundle in Fluid*. Transactions of the ASME, Vol. 120, February 1998, pp. 56-61.
- [3] Zhang, R.J.: *A Beam Bundle in a Compressible Inviscid Fluid*. Transactions of the ASME, Vol. 66, June 1999, pp. 546-548.