National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2001
Svratka, Czech Republic, May 14 – 17, 2001

GENERATION OF ELASTIC WAVES BY MOVING SOURCE

Roman Ježdík*, Michal Landa†

Summary: *Principle of elastic waves generation by moving source realized by transducer array is performed. Numerical model of this generation technique is used for studying reflection and refraction coeficient on planar water–glass interface. Comparison with theoretical values of coeficients is done. Diferencies between numerial model and theory are discused.*

Key words: *Elastic waves, transducer array, reflection coefficient.*

1 Úvod

Ultrazvukové testování patří mezi nedestruktivní metody zkoušení materiálu, které se uplatňují v mnoha technických i netechnických oborech. Zařízení pro ulztazvukové testování často využívají většího počtu ultrazvukových sond (vysílačů nebo přijímačů), což umožňuje zlepšení, zefektivnění a zrychlení měření. Jednou z možností využití většího počtu sond je vytvoření skupiny vhodně uspořádaných ultrazvukových vysílačů, jejichž fázová zpoždění jsou předpdfána a vzájemě provázána. Tuto skupinu vysílačů pak nazýváme pole vysílačů (transducer array). Nejjednodušším případem takovéhoto pole je několik vysílačů rozmístěných podél zvolené úsečky (linear array). Toto pole je možné využít např. ke generování vlny fokusované do jednoho bodu. Jiným příkladem je možnost generování šikmé rovinné vlny, která dopadá na testovaný vzorek. Tímto případem se budeme dále zabývat.

Předpokládáme pole ultrazvukových vysílačů rovnoměrně rozložených podél zvolené úsečky. Každý z vysílačů vysílá úzký pulz s časovým zpožděním, které je přímo úměrné vzdálenosti od prvního vysílače. Při splnění několika dalších předpokladů je generována rovinná vlna, stejně jako v případě, kdy se zdroj rozruchu pohybuje po zvolené úsečce. Proto tento proces někdy nazýváme generování rovinné vlny pomocí pohyblivého zdroje.

Cílem této práce je vytvořit model generování rovinné vlny pomocí pohyblivého zdroje umístěného ve vodě. Generovaná vlna dopadá na skleněný vzorek. Část energie prochází do vzorku a část se odráží zpět do vody. Jsou sledována pole časových derivací posuvů (dále jen rychlostí posuvů) ve zvolených časových snímcích a časové průběhy složek rychlostí posuvů ve vybraných bodech v závislosti na úhlu dopadu generovaných vln.

K modelování tohoto případu byl použit výpočtový systém LISA-2D (Local Interaction Simulation Approach). Jedná se o integrační schéma, které bylo vytvořeno pro paralelní výpočty. Představuje obdobu metody konečných diferencí. Je vhodné pro řešení šíření napěťových vln v dvourozměrných nehomogenních prostředích. U modelů s ostrým materiálovým rozhraním integrační schéma používá tzv. SIM model (sharp interface model). SIM je vhodný v případech,

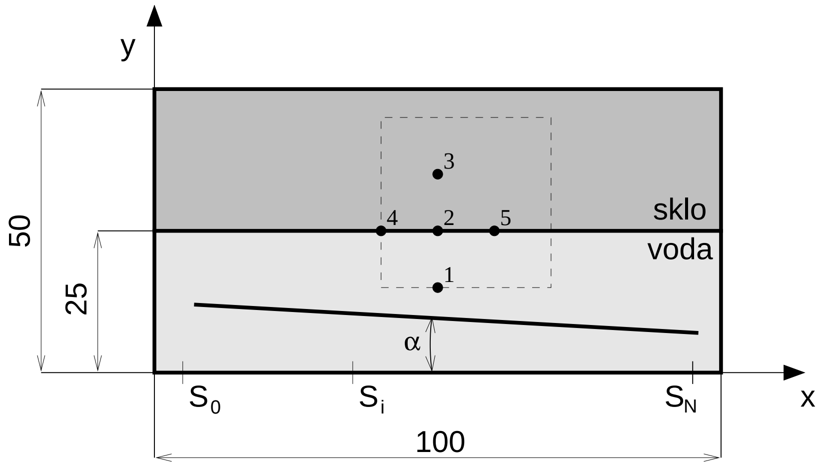
*Ing. Roman Ježdík, Ústav termomechaniky AVČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8; tel. +420 2 6605 2026, e–mail: jezdik@it.cas.cz

†Ing. Michal Landa, CSc. Ústav termomechaniky AVČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8; tel. +420 2 6605 3672, e–mail: ml@it.cas.cz

kdy se skokem mění materiálové vlastnosti sousedních buňek sítě. Je použitelný i tam, kde metoda konečných diferencí díky skokovým změnám materiálových vlastností selhává. Podrobný popis a odvození iteračních rovnic lze nalézt v [1].

2 Popis modelu

Na dvourozměrné obdélníkové oblasti o rozměrech 100×50 mm (viz obr. 1) byla za podmínek rovinné deformace řešena pohybová rovnice. Počátek souřadného systému byl umístěn do levého dolního rohu oblasti. Oblast byla rozdělena na dvě části. První z nich byly přiřazeny materiálové



Obrázek 1: Model.

parametry, které odpovídají sklu, tj. hustota $\varrho_s = 2\,230\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, rychlost šíření podélné, smykové, resp. Rayleighovy vlny $c_L = 5\,640\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $c_T = 3\,280\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, resp. $c_R = 3\,013\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Druhá část měla parametry vody (hustota $\varrho_v = 1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, rychlost šíření podélné vlny $v_L = 1\,480\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$).

V čase $t = 0$ byly všechny složky posuvů i rychlostí nulové. Na okrajích uvažované oblasti $x = 0$ a $x = 100$ mm bylo zabráněno posuvům ve směru osy x a ve směru osy y. Okraje $y = 0$ a $y = 50$ mm byly volné.

Oblast byla rozdělena pomocí čtvercové sítě o velikosti oka $a = 0.1$ mm. Časový krok byl $\Delta t = 13.794$ ns. Výpočet byl ukončen v čase $t = 41.4\,\mu$s.

2.1 Princip a realizace generování rovinné vlny

Při generování šikmé rovinné vlny vycházíme z následující úvahy [2]. Uvažujeme bodový zdroj rozruchu, který se pohybuje ve směru osy x konstantní rychlostí v_S. Předpokládejme, že rychlost šíření rozruchu ve vodě v_L je menší než v_S. V čase $t = 0$ se zdroj nalézal v bodě S_0. Vlivem pohybu zdroje vzniká v každém okamžiku t v místě $x = x_{\mathrm{S}_0} + v_S t$, $y = 0$ nová vlnoplocha. V čase $t > l/v_S$ existuje vlnoplocha se středem v bodě $x = l + x_{\mathrm{S}_0}$, $y = 0$, která je popsána rovnicí

$$(x - x_{\mathrm{S}_0} - l)^2 + y^2 = \left(t - \frac{l}{v_S}\right)^2 v_L^2, \tag{1}$$

kde l je vzdálenost středu vlnoplochy od bodu S_0. Poznamenejme ještě, že výraz $\left(t - \frac{l}{v_S}\right) v_L$ představuje poloměr vlnoplochy.

Rovnici (1) přepíšeme do anulovaného tvaru

$$F(l) = (x - x_{\mathrm{S}_0} - l)^2 + y^2 - \left(t - \frac{l}{v_S}\right)^2 v_L^2 = 0, \tag{2}$$

což je jednoparametrická soustava křivek s parametrem l. Její obálka je popsána vztahem

$$\frac{\partial F(l)}{\partial l} = 0. \tag{3}$$

Po dosazení z rov. (2) do (3) a úpravě dostaneme:

$$l = \frac{v_S[v_S(x - x_{\mathrm{S}_0}) - v_L^2 t]}{v_S^2 - v_L^2}. \tag{4}$$

Po dosazení za parametr l do rovnice (2) a dalších úpravách získáme vztah:

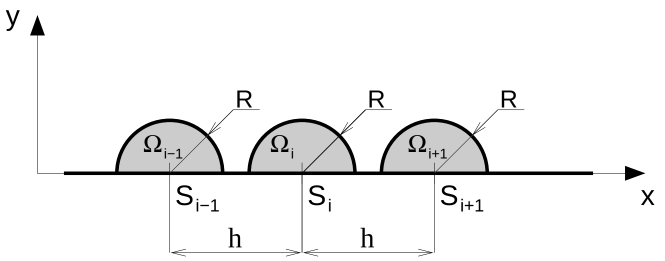
$$\left[\frac{v_L}{\sqrt{v_S^2 - v_L^2}}\left(v_S t - (x - x_{\mathrm{S}_0})\right) - y\right] \cdot \left[\frac{v_L}{\sqrt{v_S^2 - v_L^2}}\left(v_S t - (x - x_{\mathrm{S}_0})\right) + y\right] = 0. \tag{5}$$

Tento vztah představuje rovnice dvou přímek, které tvoří obálku soustavy křivek $F(l) = 0$. Protože se zdroj rozruchu nachází na okraji oblasti, interpretujeme přímku

$$y = \left[\frac{v_L}{\sqrt{v_S^2 - v_L^2}}\left(v_S t - (x - x_{\mathrm{S}_0})\right)\right] \tag{6}$$

jako vlnoplochu generované rovinné vlny. Druhá z přímek v našem případě nemá z fyzikálního hlediska smysl, neboť se nachází mimo uvažovanou oblast.

Pohyblivý zdroj byl v našem případě realizován pomocí pole postupně spouštěných silových zdrojů. Pole se skládalo z 255 zdrojů. Zdroj s pořadovým číslem i byl umístěn v bodě S_i. Vzdálenost mezi body S_i a S_{i+1} byla $h = 0.4\,\mathrm{mm}$. i-tý zdroj představovala vnitřní objemová



Obrázek 2: Realizace pole zdrojů.

síla $f_i(\vec{x}, t)$ rozložená na jedné polovině kruhové oblasti Ω_i s poloměrem $R = 1\,\mathrm{mm}$ (viz obr. 2)[1] podle vztahu:

$$f_i(\vec{x}, t) = A_f \cos\left(\frac{\pi r}{2R}\right) \exp\left[-\left(\frac{t - t_0 - \tau_i}{\beta}\right)^2\right], \quad r = \sqrt{(x - x_{\mathrm{S}_i})^2 + y^2}, \tag{7}$$

přičemž $A_f = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ je amplituda, $t_0 = 1.213942\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ je konstantní časové zpoždění stejné pro všechny zdroje, $\beta = 0.4\,\mu\mathrm{s}$ je časový parametr zdroje, τ_i je časové zpoždění, které odpovídá rychlosti pohyblivého zdroje:

$$\tau_i = \frac{x_{\mathrm{S}_i} - x_{\mathrm{S}_0}}{v_S}. \tag{8}$$

Mimo oblast Ω_i bylo $f_i(\vec{x}, t) = 0$.

Změnou rychlosti pohybu zdroje v_S je možné nastavit úhel $\alpha = \arcsin\left(\frac{v_L}{v_S}\right)$, pod kterým generovaná vlna dopadá na rozhraní voda–sklo (viz obr. 1). V tabulce 1 jsou uvedeny sledované úhly dopadu a jim odpovídající rychlosti zdroje.

[1] Jelikož je $h < 2R$, oblasti Ω_i se ve skutečnosti překrývají.

α	[°]	10.0	15.2	20.0	26.8	28.1	29.4	35.0
v_S	$[\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$	8523	5640	4327	3280	3140	3013	2580

Tabulka 1: Úhel dopadu vlny generované pohyblivým zdrojem, který má rychlost v_S.

3 Výsledky

Výsledkem výpočtů jsou pole rychlostí posuvů. Na celé obdélníkové oblasti byla zaznamenávána velikost rychlosti ve zvolených časových snímcích. Detailněji byly zaznamenány složky vektoru rychlosti ve čtvercovém výřezu o rozměrech 30×30 mm. Výřez je vyznačen na obrázku 1. Byly zvoleny body $1, 2, \ldots 5$. Bod 2 leží uprostřed obdélníkové oblasti na rozhraní voda–sklo. Ostatní body jsou od bodu 2 vzdáleny o 10 mm v příslušném směru. V těchto bodech byly zaznamenávány časové průběhy složek rychlostí posuvů v každém časovém kroku.

Pro posouzení výsledků je důležité teoreticky určit závislost úhlů odrazu a lomu na úhlu dopadu. Rovněž je nutné znát poměr velikosti amplitudy odražené a prošlé vlny k velikosti amplitudy vlny dopadající. Tyto poměry nazýváme koeficient odrazu a průchodu. Připomeňme, že koeficienty rovněž závisí na úhlu dopadu. Řešení tohoto problému je možno nalézt např. v [3]. Proto se zde omezíme na výsledné vztahy, použité v našem případě.

Hledané úhly určíme pomocí Snellova zákona:

$$\frac{\sin(\alpha)}{v_L} = \frac{\sin(\alpha_L)}{c_L} = \frac{\sin(\alpha_T)}{c_T}. \tag{9}$$

Kde: α je úhel dopadu, α_L je úhel lomu podélné vlny a α_T je úhel lomu smykové vlny. Pro úhel odrazu podélné vlny nezavádíme zvláštní označení, neboť je stejný jako úhel dopadu α. v_L, c_L a c_T jsou výše definované rychlosti.

Koeficient odrazu podélné vlny r_{LL}, koeficient průchodu podélné a smykové vlny t_{LL} a t_{LT} určíme z následujících vztahů:

$$\begin{aligned} &r_{LL} = \frac{n-m}{n+m}, \qquad t_{LL} = 2\frac{Z}{Z_L} \cdot \frac{\cos(2\alpha_T)}{n+m}, \qquad t_{LT} = -2\frac{Z Z_T}{Z_L^2} \cdot \frac{\sin(2\alpha_L)}{n+m} \\ &n = \left(\frac{c_T}{c_L}\right)^2 \cdot \sin(2\alpha_T)\sin(2\alpha_L) + \cos^2(2\alpha_T), \qquad m = \frac{Z\cos(\alpha_L)}{Z_L\cos(\alpha)} \\ &Z = \varrho_v v_L, \qquad Z_L = \varrho_s c_L, \qquad Z_T = \varrho_s c_T \end{aligned} \tag{10}$$

Ve vztazích (10) představují symboly Z, Z_L, Z_T akustické impedance.

Závislost amplitudy a fáze koeficientů odrazu a lomu na úhlu dopadu ukazuje obrázek 3.

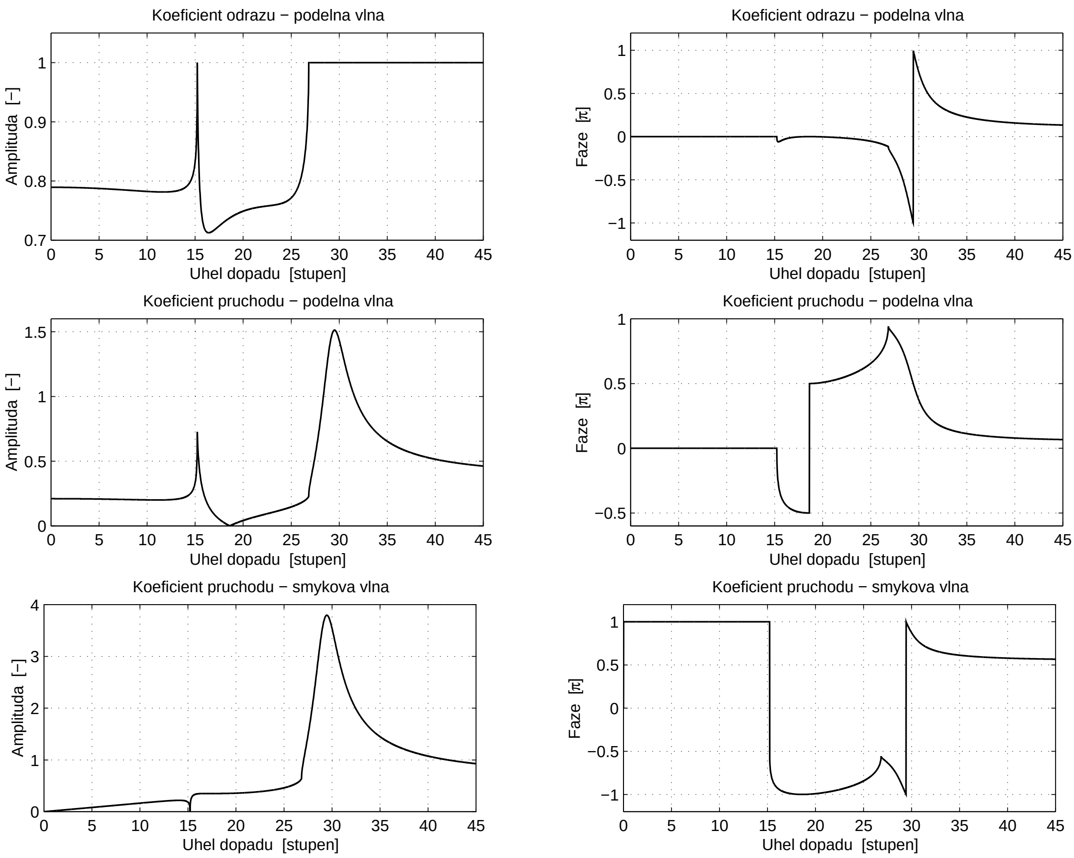
Průběhy koeficientů odrazu a průchodu jsou charakterizovány tzv. kritickými úhly:

$$\alpha_{Lkr} = \arcsin(\frac{v_L}{c_L}), \quad \alpha_{Tkr} = \arcsin(\frac{v_L}{c_T}), \quad \alpha_{Rkr} = \mathrm{arcSin}(\frac{v_L}{c_R}). \tag{11}$$

α_{Lkr} představuje první kritický úhel, α_{Tkr} je druhý kritický úhel a α_{Rkr} se nazývá třetí kritický úhel. Dopadá-li vlna na rozhraní pod úhlem větším, než je kritický, odpovídající prošlá vlna neexistuje. Dopadá-li vlna na rozhraní pod prvním kritickým úhlem nebo pod úhlem, který je větší nebo roven druhému kritickému úhlu, dochází k totálnímu odrazu. Hodnoty kritických úhlů v našem případě jsou:

$$\alpha_{Lkr} = 15.2°, \quad \alpha_{Tkr} = 26.8°, \quad \alpha_{Rkr} = 29.4°. \tag{12}$$

Nyní ověříme souhlas úhlů odrazu a lomu, které poskytuje model, s úhly vypočtenými teoreticky z rovnic (9). K tomu nám dobře poslouží případ, kdy je úhel dopadu $\alpha = 10°$, protože



Obrázek 3: Průběhy amplitudy a fáze koeficientů odrazu a průchodu v závislosti na úhlu dopadu.

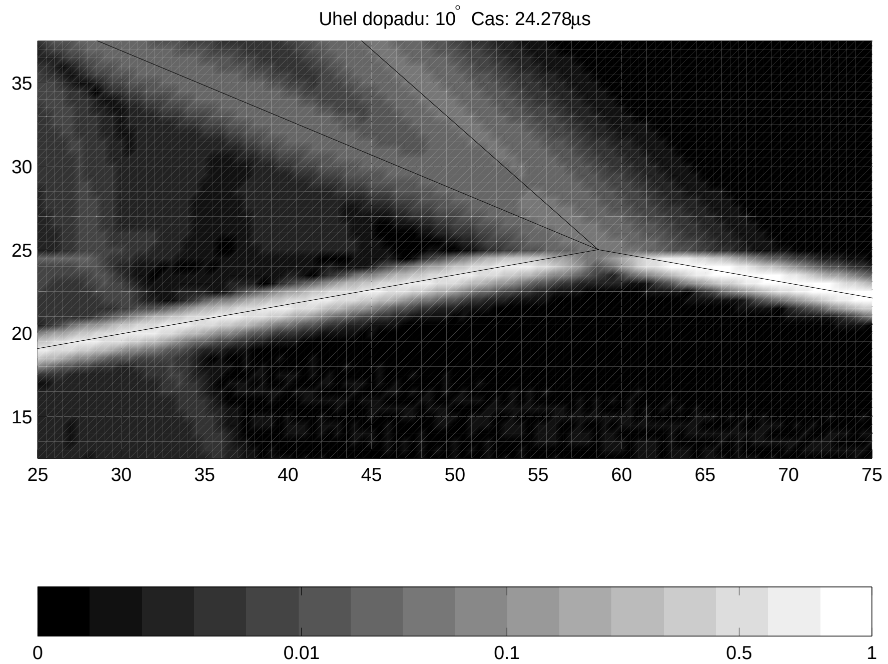
pro tento úhel ještě existují obě lomené vlny. Odpovídající úhel lomu podélné vlny je potom $\alpha_L = 41.4^\circ$, úhel lomu smykové vlny $\alpha_T = 22.6^\circ$. Úhel odrazu je shodný s úhlem dopadu. Na obrázku 4 je vidět rozložení velikosti vektoru rychlosti v okolí místa dopadu. Poloha vlnoploch, která odpovídá teoreticky vypočteným úhlům, je v obrázku vyznačena černými úsečkami.

Na obrázku 5 jsou znázorněny časové průběhy rychlostí posuvů ve směru polarizace jednotlivých vln pro úhel dopadu 10 stupňů. Průběhy jsou normovány na velikost amplitudy dopadající vlny. V obrázku jsou vyznačena lokální maxima, která odpovídají průchodům jednotlivých vln bodem 1, resp. bodem 3. Symbol P, resp. $\mathrm{P^r}$ označuje průchod dopadající, resp. odražené vlny (bod 1). Symbol $\mathrm{P^t}$, resp. $\mathrm{S^t}$ označuje průchod podélné, resp. smykové vlny prošlé (bod 3). Protože jsou tyto průběhy normovány na velikost amplitudy dopadající vlny, představují jednotlivá lokální maxima zároveň hodnoty koeficientů odrazu nebo průchodu. Porovnání takto získaných hodnot koeficientů s koeficienty určenými z rovnic (10) je uvedeno v tabulce 2.

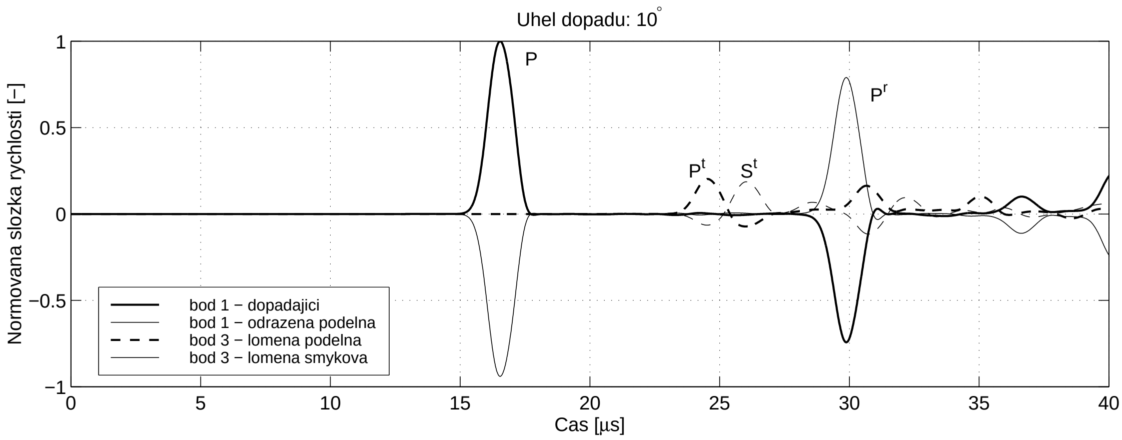
	koef. odrazu	koef. průchodu podélné v.	koef. průchodu smykové v.
teorie	0.78	0.20	0.17
num. výpočet	0.79	0.20	0.19

Tabulka 2: Porovnání koeficientů odrazu a průchodu s teoretickými hodnotami pro úhel dopadu 10 stupňů.

Obdobně jako byly porovnány koeficienty odrazu pro amplitudy jednotlivých vln lze porovnat



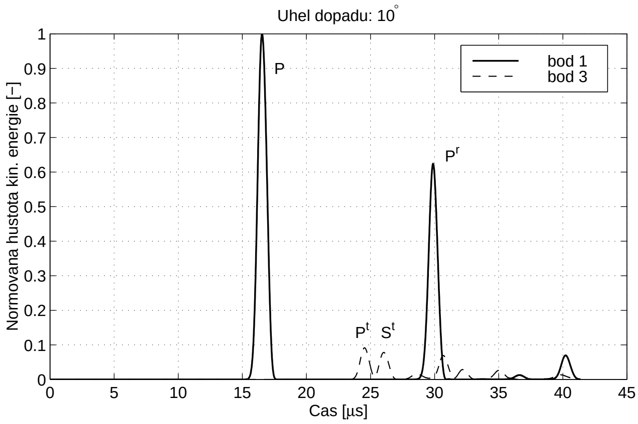
Obrázek 4: Prostorové rozložení velikosti vektoru rychlosti v okolí místa dopadu. Teoreticky určené vlnoplochy jsou vyznačeny pomocí černých úseček. Normováno na maximum.



Obrázek 5: Časové průběhy rychlostí posuvů ve směru polarizace jednotlivých vln v bodě 1 (dopadající a odražená vlna) a v bodě 3 (prošlé vlny). Úhel dopadu 10 stupňů. Normováno na velikost amplitudy dopadající vlny.

i koeficienty odrazu a průchodu hustoty kinetické energie. Koeficient odrazu pro energii má velikost r_{LL}^2, koeficient průchodu podélné, resp. smykové vlny $\frac{\varrho_s}{\varrho_v} t_{LL}^2$, resp. $\frac{\varrho_s}{\varrho_v} t_{LT}^2$. Časový průběh hustoty kinetické energie v bodě 1 a 3 pro úhel dopadu 10 stupňů je na obrázku 6. Průběhy jsou normovány na hustotu kinetické energie, která odpovídá dopadající vlně. Průchody jednotlivých vln jsou označeny stejně jako v předchozím případě. Porovnání koeficientů odrazu a průchodu hustoty kinetické energie obsahuje tabulka 3.

Při dopadu podélné vlny na rozhraní pod prvním kritickým úhlem (α_{Lkr}) se podél povrchu materiálu šíří podélná vlna rychlostí c_L, jejíž energie „prosakuje“ zpět do vody, proto je někdy



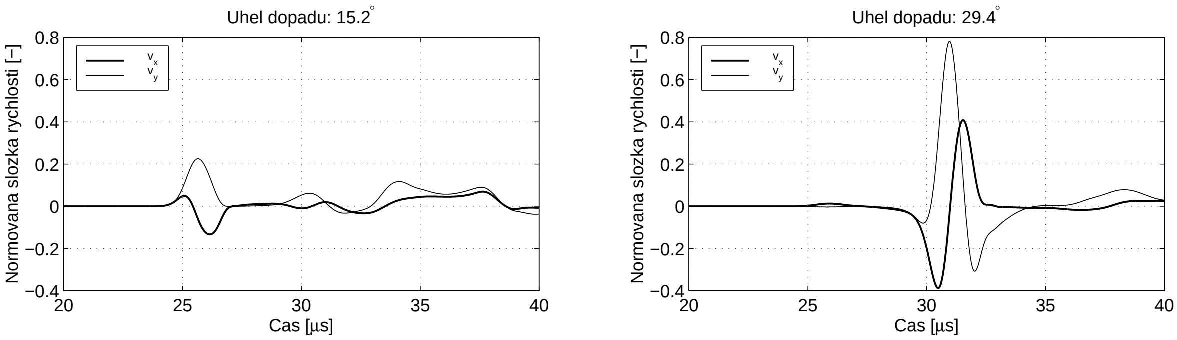
Obrázek 6: Časové průběhy hustoty kinetické energie v bodě 1 a 3. Úhel dopadu 10 stupňů. Normováno na velikost hustoty kinetické energie, která odpovídá dopadající vlně.

	koef. odrazu	koef. průchodu podélné v.	koef. průchodu smykové v.
teorie	0.61	0.09	0.06
num. výpočet	0.62	0.09	0.08

Tabulka 3: Porovnání koeficientů odrazu a průchodu hustoty kinetické energie s teoretickými hodnotami pro úhel dopadu 10 stupňů.

nazývána „prosakující podélná vlna“ (leaky longitudinal wave). Při dopadu vlny pod druhým kritickým úhlem analogická situace nenastává. Vycházíme-li z předpokladu volného povrchu, pak by amplituda smykové vlny, která by se podél tohoto povrchu šířila, musela být nulová. Při dopadu podélné vlny pod třetím kritickým úhlem (α_{Rkr}) je generována Rayleighova povrchová vlna, která se šíří podél povrchu rychlostí c_R. Její energie rovněž „prosakuje“ zpět do vody.

Na obrázku 7 jsou znázorněny časové průběhy složek rychlosti posuvů ve směru osy x a y na rozhraní voda–sklo v bodě 2 pro úhel dopadu, který je roven prvnímu („prosakující podélná vlna“) a třetímu kritickému úhlu („prosakující“ Rayleighova povrchová vlna).



Obrázek 7: Časové průběhy složek rychlosti posuvů ve směru osy x a y na rozhraní voda–sklo v bodě 2. Úhel dopadu odpovídá prvnímu kritickému úhlu – „prosakující podélná vlna“ (vlevo) a třetímu kritickému úhlu – Rayleighova povrchová vlna (vpravo). Normováno na velikost amplitudy dopadající vlny.

4 Závěr

Prostřednictvím pohyblivého zdroje modelovaného pomocí pole silových zdrojů, se podařilo vygenerovat podélnou rovinnou vlnu. Při tomto postupu se ovšem navíc generují parazitní vlny. Tyto vlny mírně zmenšují časoprostorovou oblast použitelnosti tohoto způsobu generování. Je totiž nutné řešení sledovat v časech a místech, kam parazitní vlny ještě nedošly, nebo v časech a místech, kde mají velmi malou amplitudu.

Při snahách o vygenerování rovinné vlny, která se šíří ve vodě, se ukázalo, že je vhodné uměle zavést určitou malou hodnotu rychlosti šíření smykové vlny ve vodě. Tím se odstraní oblasti, kde se po zatížení silovým pulsem hromadí větší množství parazitní energie, která se nikam nešíří. Vede to ovšem ke vzniku pomalu se šířících smykových vln, i v místech, kde je to nežádoucí.

Práce se rovněž zabývala dopadem vygenerované podélné vlny na rozhraní voda–sklo. Bylo provedeno porovnání úhlů dopadu a lomu a koeficientů odrazu a průchodu, které poskytl numerický model, s teoretickými hodnotami. Zjištěné odchylky mohou být způsobeny tím, že teorie neuvažuje malou hodnotu šíření rychlosti smykové vlny ve vodě, která byla uměle zavedena. Rozdíl, který vykazuje porovnání koeficientů průchodu smykové vlny, je s největší pravděpodobností způsoben interferencí smykové vlny s podélnou vlnou v místě, kde je koeficient určován.

Přes uvedené nedostatky je možné konstatovat, že tento postup je použitelný v případech, kdy je potřebné generovat šikmou rovinnou vlnu. Změnou rychlosti zdroje v čase je možné docílit i zakřivení vlnoplochy.

Poděkování

Tato práce vznikla za podpory grantu GA ČR č. 106/01/0396 a grantu GA AV č. A1010909. Autoři děkují Dr. Milanovi Šiňorovi, autorovi programu LISA-2D, který byl vždy ochoten tento program upravit podle jejich požadavků.

References

[1] P. P. Delsanto, R. S. Schechter, H. H. Chaskelis, R. B. Mignogna and R. Kline. Connection machine simulation of ultrasonic wave propagation in materials. II: The two-dimensional case, *Wave motion* **20**, 295–314, (1994)

[2] R. Brepta. *Vlny napětí a rázové jevy v lineárně elastických a viskoelastických prostředích.* Technická univerzita Liberec, Liberec, (1997).

[3] D. Royer and E. Dieulesaint. *Elastic Wave in Solids I.* Springer, Berlin, (2000).

[4] M. Landa, J. Červ, P. Urbánek, J. Zídek. *Ultrazvuková sonda s tvarovaným měničem na bázi piezo-filmu pro realizaci čárového fokusu; Použití pro nedestruktivní hodnocení vlastností materiálů (QNDT).* Ústav termomechaniky AV ČR, Praha, (2001).