

## TWO-PARAMETER CHARACTERISATION OF A CRACK GROWING IN THE VICINITY OF THE MATERIAL INTERFACE

R. Gröger\*, Z. Knésl†

**Summary:** A crack propagating in the vicinity of the material interface is analyzed. The problem is solved in the range of two-parameter linear elastic fracture mechanics. The aim of the contribution is to assess the influence of  $T$  stress on the direction of a crack growing to the interface. The interface is modelled for different material properties characterised by the Dundur's composite parameters. First the effect of the interface on  $T$  stress value is studied and values of  $K_I$ ,  $K_{II}$  and  $T$  stress are estimated. Consequently the two-parameter modification of MTS criterion and Sih's SED criterion is used for prediction of a crack propagation direction. Both these approaches are compared. It is concluded that the negative values of  $T$  stress stabilize the crack propagation perpendicularly to the interface.

**Key words:**  $T$ -stress, mixed mode, material interface, constraint, MTS, SED.

### Úvod

Lomová houževnatost materiálů může být významně ovlivněna velikostí constraintu na čele trhliny. Experimentálně je totiž prokázáno, že vzorky s nižší hodnotou constraintu vykazují vyšší hodnotu lomové houževnatosti.

Z analýzy rozdělení napětí v okolí kořene trhliny vyplývá, že jednou z možných cest vedoucích k popisu tohoto constraintu je složka napětí  $\sigma_{xx}$  paralelní k lícím trhliny, označovaná jako  $T$  napětí. Je také známo, že velikost plastické zóny závisí významně na velikosti  $T$  napětí. Závislost velikosti a tvaru plastické zóny na velikosti constraintu byly poprvé studovány Larssonem a Carlssonem v [3]. Constraint je označován jako vysoký, je-li  $T > 0$ , popř. nízký, je-li  $T < 0$ .

Ačkoliv v současné době existuje již množství prací zabývajících se popisem constraintu pro různé konfigurace modelu a okrajových podmínek, stále ještě zůstává v nedostatečné míře zodpovězena otázka vlivu smíšeného módu zatížení na hodnotu  $T$  napětí. Ke vzniku smykového módu přitom dochází jednak v homogenních tělesech, ale také v případě nehomogenních těles, kde jednu skupinu problémů tvoří úlohy s trhlínami v blízkosti rozhraní materiálů.

Z literatury [5] je známo, že trhlina, která leží v blízkosti rozhraní dvou materiálů a je skloněna k rozhraní o nenulový úhel (obr. 1) se chová následovně:

$E_1 < E_2$  – dochází ke zvětšování úhlu  $\theta_0$  charakterizujícího směr šíření trhliny. Trhlina pak bude mít snahu natáčet se do směru rovnoběžného s rozhraním materiálů.

$E_1 = E_2$  – homogenní případ; dochází k šíření trhliny pod úhlem, který závisí na poměru faktorů intenzity napětí  $K_{II}/K_I$

---

\*Ing. Roman Gröger, Ústav fyziky materiálů AV ČR, Žitkova 22, 616 62 Brno a  
Ústav mechaniky těles, Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno  
tel. +420 5 4163 6351, e-mail: groger@ipm.cz

†Prof. RNDr. Zdeněk Knésl, CSc., Ústav fyziky materiálů AV ČR, Žitkova 22, 616 62 Brno  
tel. +420 5 4163 6358, e-mail: knesl@ipm.cz

$E_1 > E_2$  – V tomto případě dochází ke stabilizaci směru šíření trhliny. Znamená to, že se trhlinka bude postupně natáčet do směru kolmého k vnějšímu zatížení, tedy kolmo k rozhraní materiálů.

V této práci je analyzováno šíření trhliny s ohledem na velikost normálové a smykové složky zatížení. Pro tento obecně smíšený zátěžný stav je vypočtena velikost  $K_I$ ,  $K_{II}$  a  $T$  napětí. Na základě modifikovaného kritéria maximálního tahového napětí (MTS) a kritéria hustoty deformační energie (SED) je predikován směr šíření trhliny. V druhé části práce je studován efekt vzdálenosti rozhraní na velikost constraintu napětí a stabilitu směru šířící se trhliny.

## Teoretické pozadí

### Rozdělení napětí v okolí kořene trhliny

Rozdělení napětí v okolí kořene trhliny je v polárních souřadnicích  $(r, \theta)$  možné zapsat pomocí Williamsova rozvoje

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^{\lambda_k} f_{ij}^k(\theta) \quad (1)$$

Ačkoliv je tato řada nekonečná, v rámci dvouparametrové lomové mechaniky jsou uvažovány pouze první dva členy, z nichž první člen je pro  $r \rightarrow 0$  singulární s exponentem singularity  $\lambda_k = -1/2$  a je popisován faktorem intenzity napětí  $K$ . Druhý člen Williamsova rozvoje je pro libovolné  $r$  konstantní a je označován jako  $T$  napětí. Rozdělení napětí v okolí kořene trhliny je pak

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + T \delta_{1i} \delta_{1j} \quad (2)$$

kde  $K_I$ ,  $K_{II}$  jsou faktory intenzity napětí pro normálový a smykový mód,  $\delta_{1i}$  a  $\delta_{1j}$  jsou Kroneckerovy symboly. Jak je vidět, constraint v podobě  $T$  napětí se u normálového módu namáhání projeví pro  $i = j = 1$  pouze u složky  $\sigma_{11} \equiv \sigma_{xx}$ .

### Vlastnosti materiálového rozhraní

Materiálové vlastnosti jsou v případě kompozitních těles dány čtveřicí konstant  $E_1$ ,  $\nu_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_2$ , které jsou většinou vyjadřovány ve formě tzv. Dundurových kompozitních parametrů  $\alpha$ ,  $\beta$  daných vztahy (např. [2])

$$\alpha = \frac{\Gamma(\kappa_1 + 1) - (\kappa_2 + 1)}{\Gamma(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)}, \quad \beta = \frac{\Gamma(\kappa_1 - 1) - (\kappa_2 - 1)}{\Gamma(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)}, \quad (3)$$

kde  $\Gamma$  je poměr smykových modulů pružnosti  $\mu_1/\mu_2$ . Koefficienty  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  závisí na  $\nu_1$  a  $\nu_2$  vztahy  $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$  pro rovinnou deformaci a  $\kappa_i = (3 - 4\nu_i)/(1 + \nu_i)$ , kde  $\nu_i$  je Poissonovo číslo materiálu  $i$ . Velikostně nabývají kompozitní parametry hodnot  $-1 \leq \alpha \leq 1$  a  $-0,5 \leq \beta \leq 0,5$ . Ve speciálním případě, kdy  $\alpha = \beta = 0$  se pak jedná o homogenní těleso.

Vzhledem k tomu, že v naší analýze budou oba materiály mít stejné Poissonovo číslo, bude využito poměru  $E_1/E_2$  charakterizujícího vlastnost jejich rozhraní. Tento poměr přitom, na rozdíl od kompozitních parametrů  $\alpha$  a  $\beta$ , může nabývat všech reálných hodnot.

### Metoda výpočtu T-napětí

Velikost constraintu je v případě elastické napjatosti charakterizována hodnotou  $T$  napětí. Jedna z možných metod určení  $T$  napětí [1], označovaná jako *přímá metoda superpozice napětí*, vychází z faktu, že na volných lících trhliny budou nenulové pouze složky radiálního napětí  $\sigma_{xx}$ . Pro  $\theta = \pm\pi$  jsou členy s  $K_I$  a  $K_{II}$  nulové a  $T$  napětí je přímo rovno velikosti radiálního napětí  $\sigma_{xx}|_{\theta=\pm\pi}$ . Pro výpočet  $T$  lze pak s výhodou použít aproximativní vztah [1]

$$T = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}|_{\theta=-\pi} + \sigma_{xx}|_{\theta=\pi}) \quad (4)$$

Faktor biaxiality zavedený Leeversem a Radonem [4] lze v případě smíšeného módu zatížení definovat vztahem [1]:

$$B = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_{eff}}, \quad (5)$$

kde  $a$  je délka trhliny,  $T$  je velikost T napětí a  $K_{eff}$  je efektivní hodnota faktoru intenzity napětí. V případě smíšeného módu zatížení lze  $K_{eff}$  podle [1] vyjádřit relací:

$$K_{eff} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (6)$$

## Predikce směru šíření trhliny

V rámci jednoparametrové lomové mechaniky se obecně předpokládá, že se trhlina šíří kolmo na směr největšího hlavního napětí tak, aby byl vliv smykového módu zatížení eliminován. V rámci dvouparametrového popisu vstupuje do úvah o směru šíření trhliny navíc constraint charakterizovaný hodnotou T napětí. Nejpoužívanějšími kritérii pro určení směru šíření trhliny jsou Sihovo kritérium hustoty deformační energie (SED) a kritérium maximálního tahového napětí (MTS).

SED kritérium je založeno na předpokladu, že trhlina se bude šířit ve směru minimální objemové hustoty deformační energie  $dW/dV$ , tedy ve směru minima funkce

$$S \equiv \frac{dW}{dV} = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_IK_{II} + a_{22}K_{II}^2 + b_1K_IT + b_2K_{II}T + b_3T^2 \quad (7)$$

Koeficienty  $a_{ij}$  jsou funkcemi radiálních souřadnic  $(r, \theta)$  a materiálových parametrů a jsou dány vztahy [7]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= A(\kappa - \cos \theta)(1 + \cos \theta) & b_1 &= B \cos \frac{\theta}{2} [(\kappa - 2) - \cos \theta + 2 \cos^2 \theta] \\ a_{12} &= A \sin \theta [(1 - \kappa) + 2 \cos \theta] & b_2 &= -B \sin \frac{\theta}{2} [\kappa + \cos \theta + 2 \cos^2 \theta] \\ a_{22} &= A[(1 + \kappa)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)] & b_3 &= \frac{1+\kappa}{16\mu}, \end{aligned} \quad (8)$$

kde  $A = 1/(16\mu\pi r)$ ,  $B = 1/(4\mu\sqrt{2\pi r})$ ,  $\mu$  je smykový modul pružnosti a  $\kappa$  je koeficient definovaný u vztahu (3). Minimalizací funkce (7) získáme směr šíření trhliny  $\theta_0$  splňující podmínky minima hustoty deformační energie  $\partial S/\partial \theta = 0$  a  $\partial^2 S/\partial \theta^2 > 0$ .

Kritérium MTS vychází z předpokladu, že se trhlina bude vždy šířit směrem maximálního tahového napětí, tj. ve směru maxima obvodového napětí  $\sigma_{\theta\theta}$ . Z rozboru výsledků prací zabývajících se výpočty směru šíření trhliny vyplývá, že směr šíření trhliny závisí v případě smíšeného módu na velikosti  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $T$  a na vzdálenosti od kořene trhliny. Hledaný úhel  $\theta_0$  pak podle modifikovaného kritéria MTS odpovídá maximu napětí  $\sigma_{\theta\theta}$ , tj. splňuje podmínky  $\partial \sigma_{\theta\theta}/\partial \theta = 0$  a  $\partial^2 \sigma_{\theta\theta}/\partial \theta^2 < 0$ .

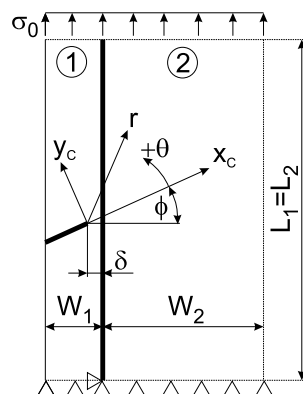
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \left( 3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) - 3K_{II} \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] + T \sin^2 \theta \quad (9)$$

Skutečnost, že směr šíření trhliny závisí také na vzdálenosti  $r_0$  způsobuje problematické stanovení úhlu  $\theta_0$ . V literatuře je voleno obvykle  $r_0 = a/100$ , kde  $a$  je délka trhliny, přičemž tato volba je čistě účelová a nemá odpovídající fyzikální opodstatnění. V článku [6] je hodnota  $r_0$  rovna velikosti plastické zóny na čele trhliny, která je určena např. pomocí von Misesovy podmínky. Prakticky se velikost plastické zóny určuje ve směru trhliny, přičemž v obecném případě je k vyjádření  $\theta_0$  z rovnic (7) a (9) nutné použít metod numerické analýzy.

## Numerické výsledky

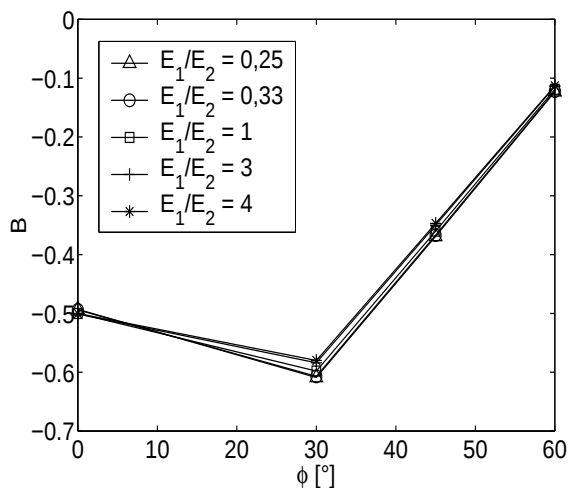
### Stanovení velikosti lomových parametrů

Pro výpočet  $T$  napětí a směru šíření trhliny byl použit vzorek s boční trhlinou délky  $a$  skloněnou od kolmice k rozhraní o úhel  $\phi$ . Vzorek byl modelován jako polonekonečný a byl podroben normálovému zatížení v dostatečné vzdálenosti od kořene trhliny.



Obr. 1: Model vzorku s trhlinou

Napětí  $\sigma_0 = 50$  MPa bylo modelováno jako liniové, přičemž byly uvažovány podmínky rovinné deformace. Rozhraní materiálů bylo tvořeno spojením dvou pásů, zajišťujícím spojitost posuvů na rozhraní, o šířkách  $W_1 = 20$  mm,  $W_2 = 200$  mm a délce  $L_1 = L_2 = 1000$  mm. Oba materiály byly uvažovány homogenní, přičemž v našich výpočtech zůstávala Poissonova čísla obou materiálů neměnná, a to  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ .



Obr. 2: Nezávislost faktoru biaxiality na poměru  $E_1/E_2$

Nejdříve byly zjišťovány hodnoty  $K$  a  $T$  pro konstantní vzdálenost trhliny od rozhraní  $\delta = 10$  mm. K aproximaci  $T$  byla použita přímá metoda superpozice napětí [1]. Hodnoty  $\sigma_{xx}$  byly stanoveny pro poměr  $0,2 \leq r/a \leq 1$  na obou lících trhliny, tj. pro  $\theta = -\pi$  a  $\theta = \pi$ .

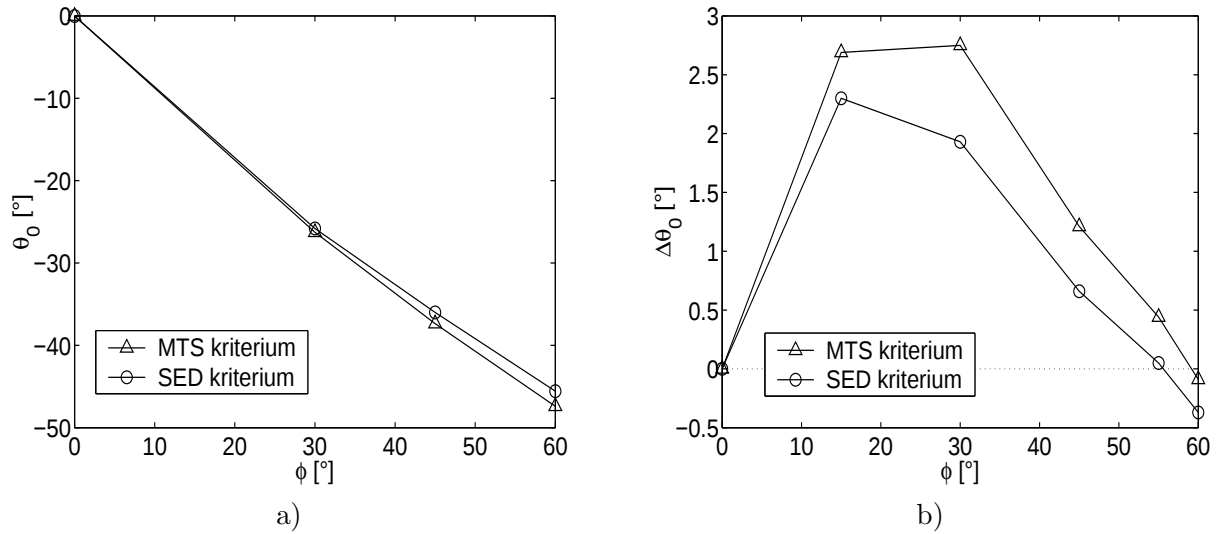
Závislost faktoru biaxiality na úhlu sklonu trhliny  $\phi$  pro různé poměry  $E_1/E_2$  ukazuje obr. 2. Vidíme, že pro všechny sledované úhly  $\phi$  je stanovená hodnota  $B$  velmi blízká a lze tedy říci, že faktor biaxiality je nezávislý na vlastnostech rozhraní.

### Směr šíření trhliny

Nejdříve byla testována shoda výsledků získaných pomocí kritéria MTS a SED, a to pro typicky nehomogenní rozhraní  $E_1/E_2 = 4$ . Získané hodnoty uvádí tab. 1, průběh závislosti  $\theta_0(\phi)$  pak obr. 3 a). Obě kritéria poskytují velmi blízké hodnoty směru šíření trhliny, a to jak pro homogenní, tak i nehomogenní rozhraní materiálů. V tab. 1 uvádíme získané hodnoty pouze pro významné poměry Youngových modulů.

Tab. 1: Hodnoty lomových parametrů pro různý sklon trhliny  $\phi$ . Jednotky:  $K$  [MPa.mm<sup>1/2</sup>],  $T$  [MPa],  $\theta_0$  [°],  $\phi$  [°]

| $E_1/E_2 = 0,25$ |        |        |        |        | $E_1/E_2 = 4$    |        |        |        |        |
|------------------|--------|--------|--------|--------|------------------|--------|--------|--------|--------|
|                  | $\phi$ |        |        |        |                  | $\phi$ |        |        |        |
|                  | 0      | 30     | 45     | 60     |                  | 0      | 30     | 45     | 60     |
| $K_I$            | 93,63  | 82,67  | 70,31  | 54,87  | $K_I$            | 756,74 | 668,19 | 565,93 | 425,69 |
| $K_{II}$         | 0,03   | 27,45  | 35,30  | 39,17  | $K_{II}$         | 0,07   | 223,42 | 287,9  | 319,74 |
| $T$              | -8,23  | -9,46  | -5,18  | -1,48  | $T$              | -67,57 | -72,94 | -39,31 | -10,74 |
| $B$              | -0,49  | -0,61  | -0,37  | -0,12  | $B$              | -0,50  | -0,58  | -0,35  | -0,11  |
| $\theta_0$ (MTS) | -0,03  | -29,85 | -39,45 | -47,17 | $\theta_0$ (MTS) | -0,01  | -26,27 | -37,36 | -47,41 |
| $\theta_0$ (SED) | -0,03  | -28,34 | -37,17 | -44,85 | $\theta_0$ (SED) | -0,01  | -25,81 | -36,00 | -45,56 |



Obr. 3: Porovnání kritéria MTS a SED ( $E_1/E_2 = 4$ ,  $\delta = 10$  mm)

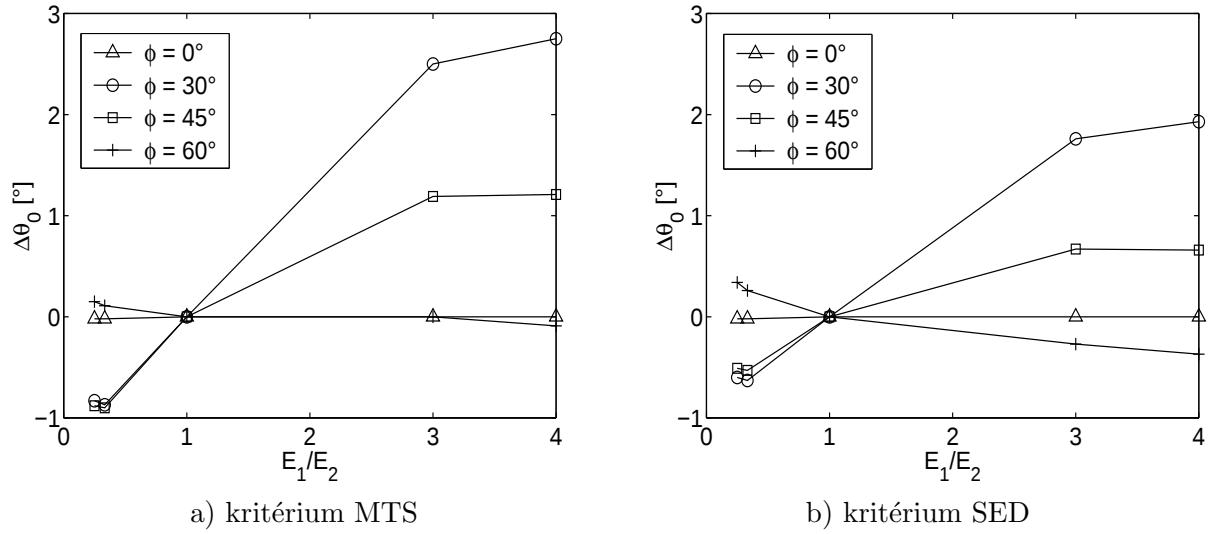
V našem případě nejsou čela trhliny podrobena pouze čistému normálovému módu, kde  $K_{II} = 0$ , ale navíc obsahují jistou nenulovou složku smykového zatížení. K čistému módu I dochází pouze u  $\phi = 0$ . Natáčíme-li postupně líce trhliny o úhel  $\phi$ , převládá pro dané  $\delta$  smykové zatížení nad vlivem rozhraní. Tento jev trvá přibližně do  $\phi = 60^\circ$ . Při dalším natáčení trhliny se projevuje významný vliv rozhraní a směr šíření trhliny je pro  $E_1 > E_2$  rozhraním stabilizován.

Uvažujeme polární souřadný systém  $(r, \theta)$  s vrcholem v kořeni trhliny. Označme  $\bar{\theta}_0$  směr šíření trhliny vypočtený pro homogenní vzorek, tj. za předpokladu  $E_1 = E_2$ . Mějme libovolnou nehomogenní kombinaci materiálových charakteristik  $E_i$  a  $\nu_i$ , pro kterou máme určen směr šíření trhliny označený  $\theta_0$ . Potom rozdíl úhlů

$$\Delta\theta_0 = \theta_0 - \bar{\theta}_0 \quad (10)$$

označíme jako *stabilizační úhel* materiálového rozhraní.

Je-li tento úhel kladný, má trhlina tendenci šířit se podél rozhraní; bude-li úhel  $\Delta\theta_0$  záporný, má rozhraní stabilizační vliv na směr šíření trhliny, a ta se natáčí kolmo k rozhraní.



Obr. 4: Efekt stabilizace úhlu  $\theta_0$  pro různé kombinace  $E_1/E_2$  a  $\phi$  ( $\delta = 10$  mm)

Na obr. 4 je vidět porovnání stabilizačních úhlů  $\Delta\theta_0$  stanovených na základě kritéria MTS a SED. V jistém rozmezí  $\phi$  je pro  $E_1/E_2 > 1$  stabilizační úhel kladný. Pro úhly  $\phi > 60^\circ$  již můžeme pozorovat podstatný stabilizační vliv rozhraní – obr. 3 b). Šíří-li se trhlina z materiálu  $E_1$  a platí, že  $E_1 > E_2$ , způsobuje rozhraní stabilizaci směru šíření trhliny. Trhlina má tedy snahu šířit se ve směru kolmém k rozhraní. Pro  $\phi > 60^\circ$  lze pozorovat výrazný stabilizační účinek rozhraní, což dokazuje i průběh  $\Delta\theta_0(\phi)$  pro obě použitá kritéria na obr. 3 b).

### Efekt vzdálenosti trhliny od rozhraní

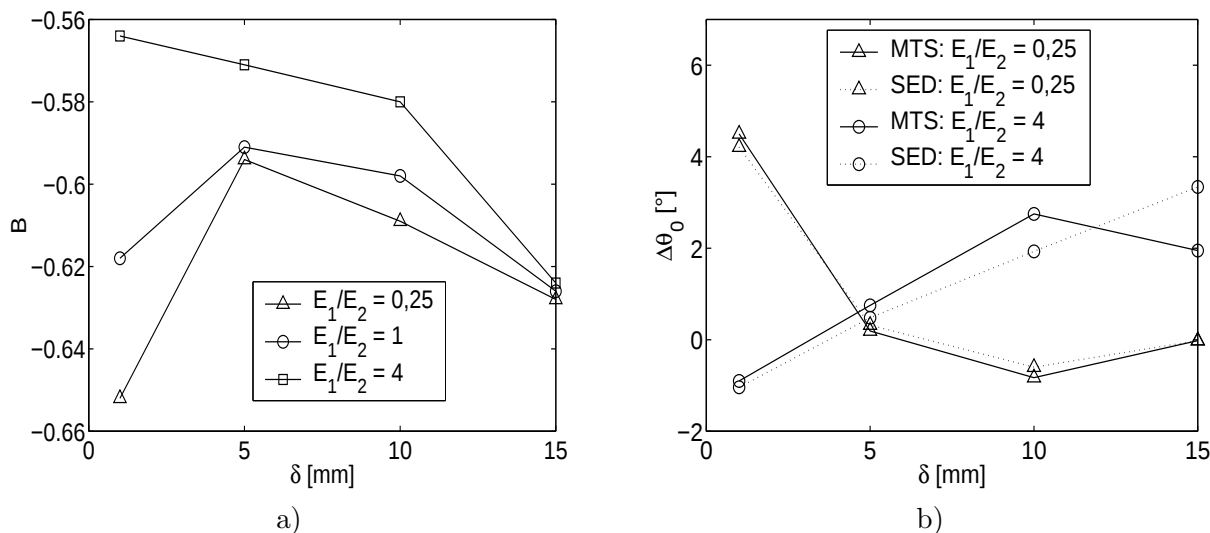
Předchozí analýzy předpokládaly neměnnou vzdálenost  $\delta$  kořene trhliny od rozhraní. Abychom dokázali lépe zodpovědět, jaký vliv má rozhraní na velikost constraintu a směr šíření trhliny, byly modelovány další tři konfigurace pro  $\delta = 1, 5$  a  $15$  mm. Výpočty byly provedeny pro úhel sklonu trhliny  $\phi = 30^\circ$  a různé kombinace  $E_1/E_2$  – získané hodnoty udává pro okrajové poměry Youngových modulů následující tabulka.

Tab. 2: Hodnoty lomových parametrů pro různé vzdálenosti kořene trhliny od rozhraní. Jednotky:  $K$  [MPa·mm<sup>1/2</sup>],  $T$  [MPa],  $\theta_0$  [°],  $\delta$  [mm]

| $\phi = 30^\circ, E_1/E_2 = 0,25$ | $\delta$ |        |        |        |
|-----------------------------------|----------|--------|--------|--------|
|                                   | 1        | 5      | 10     | 15     |
| $K_I$                             | 99,10    | 92,14  | 82,67  | 63,20  |
| $K_{II}$                          | 14,68    | 28,08  | 27,45  | 21,47  |
| $T$                               | -8,45    | -8,34  | -9,46  | -10,58 |
| $B$                               | -0,65    | -0,59  | -0,61  | -0,63  |
| $\theta_0$ (MTS)                  | -15,40   | -28,30 | -29,85 | -29,71 |
| $\theta_0$ (SED)                  | -14,99   | -26,89 | -28,34 | -28,31 |

| $\phi = 30^\circ, E_1/E_2 = 4$ | $\delta$ |        |        |        |
|--------------------------------|----------|--------|--------|--------|
|                                | 1        | 5      | 10     | 15     |
| $K_I$                          | 1553,60  | 949,23 | 668,19 | 414,05 |
| $K_{II}$                       | 367,50   | 311,95 | 223,42 | 140,68 |
| $T$                            | -116,59  | -83,16 | -72,94 | -68,82 |
| $B$                            | -0,56    | -0,57  | -0,58  | -0,62  |
| $\theta_0$ (MTS)               | -20,80   | -27,74 | -26,27 | -27,74 |
| $\theta_0$ (SED)               | -20,24   | -26,73 | -25,81 | -24,95 |

Na obr. 5 a) je vidět vliv rozdílnosti Youngových modulů na velikost faktoru biaxiality. Nachází-li se kořen trhliny v dostatečné vzdálenosti od rozhraní, jsou hodnoty  $B$  pro všechny sledované kombinace  $E_1/E_2$  velmi blízké. S klesající vzdáleností  $\delta$  pozorujeme výrazný nárůst  $B$  pro  $E_1/E_2 > 1$ .



Obr. 5: Vliv vzdálenosti rozhraní na velikost  $B$  a úhlové difference  $\Delta\theta_0$

Získané hodnoty  $\theta_0$  pro obě použítá kritéria udává tab. 2, průběh velikosti stabilizačního úhlu  $\Delta\theta_0$  pak obr. 5 b). V případě, kdy se trhlina šíří z materiálu s větším Youngovým modulem, tedy  $E_1/E_2 > 1$ , dochází s klesající vzdáleností  $\delta$  k poklesu  $\Delta\theta_0$ . Fyzikálně se jedná o stav, kdy se trhlina natáčí do směru kolmého k rozhraní, tedy kolmo na směr největšího hlavního napětí. V těsné blízkosti rozhraní dostáváme zápornou hodnotu stabilizačního úhlu  $\Delta\theta_0$  a rozhraní pak výrazně ovlivňuje směr šíření trhliny.

V druhém případě, kdy se trhlina šíří z materiálu s menším Youngovým modulem, tedy  $E_1/E_2 < 1$ , dochází v blízkosti rozhraní k nárůstu  $\Delta\theta_0$ . V těsné blízkosti rozhraní je  $\Delta\theta_0$  kladný, což nasvědčuje stavu, kdy se trhlina natáčí do směru rovnoběžného s rozhraním.

## Závěr

Byla modelována součást s rozhraním dvou materiálů, kde z materiálu 1 se do materiálu 2 šíří trhlina pod obecným úhlem  $\phi$  s kořenem ve vzdálenosti  $\delta$  od rozhraní. Pro výpočet T napětí byla použita přímá metoda superpozice napětí [1], z něhož byl následně určen faktor biaxiality napětí  $B$ .

Pro predikci směru šíření trhliny bylo využito modifikovaného kritéria maximálního tahového napětí MTS a také Sihova kritéria hustoty deformační energie SED. Získané úhly směru šíření trhliny  $\theta_0$  byly vyjádřeny pomocí stabilizačního úhlu  $\Delta\theta_0$ . Je-li tento úhel kladný, způsobuje rozhraní nárůst úhlu šíření trhliny. Je-li tento úhel záporný, má rozhraní výrazný stabilizační účinek na směr šíření trhliny a trhlina má tendenci šířit se kolmo k rozhraní.

Bylo zjištěno, že rozhraní dvou materiálů má výrazný vliv na stabilitu směru šířící se trhliny, a to zejména v těsné blízkosti rozhraní. V případě, kdy se trhlina šíří z materiálu s vyšším Youngovým modulem, je vliv rozhraní na směr šíření trhliny malý a s klesající vzdáleností kořene trhliny od rozhraní významně narůstá. Vychází-li trhlina z materiálu s menším  $E$ , má tendenci šířit se ve směru rovnoběžném s rozhraním, a to hlavně v těsné blízkosti rozhraní, kdy je stabilizační účinek rozhraní podstatný (kladný úhel  $\Delta\theta_0$ ). U trhlín ve větších vzdálenostech od rozhraní je směr jejich šíření výrazně ovlivněn velikostí smykových napětí podél lící trhliny.

Ze získaných výsledků byl studován vliv vzdálenosti rozhraní na hodnoty lomových parametrů a na směr šíření trhliny. Bylo zjištěno, že s klesající vzdáleností  $\delta$  kořene trhliny od rozhraní klesá (pro  $E_1/E_2 > 1$ ), popř. roste (pro  $E_1/E_2 < 1$ ) velikost stabilizačního úhlu. Důsledkem těchto závěrů je již zmíněná tendence trhliny rychleji se natáčet do směru kolmého, popř. rovnoběžného s rozhraním. V těsné blízkosti rozhraní je už možné pozorovat výrazný vliv nehomogenity prostředí.

Výsledky této práce lze využít při studiu šíření trhlin zejména v kompozitních materiálech. V případě, kdy trhlina končí na rozhraní materiálů, je exponent singularity napětí obecně různý od  $-1/2$  a zavádí se zobecněný faktor intenzity napětí  $H$ . Pokud se trhlina šíří v rozhraní, je tento exponent komplexní a ke stanovení hodnot lomových parametrů je nutné zabývat se komplexní analýzou rovnice (1).

## Poděkování

Tento článek byl vytvořen v rámci řešení grantu GA ČR č. 106/99/1173.

## Reference

- [1] Ayatollahi M. R., Smith D. J., Pavier M. J.: *A method for calculating T-stress in mixed mode problems*, Key Engin. Materials **145–149**, pp. 83–88, 1998
- [2] Knésl Z., Šrámek A., Kaďourek J., Kroupa F.: *Stress concentration at the edges of coatings on tensile specimens*, Acta Technica ČSAV **5**, pp. 574–593, 1991
- [3] Larsson S. G., Carlsson A. J.: *Influence of non-singular stress terms on small scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials*, Institutionen för hallfasthetslära, Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm, 1972
- [4] Leivers P. S., Radon J. C.: *Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries*, Int. Journal of Fracture **19**, pp. 311–325, 1982
- [5] Menčík J.: *Mechanics of Components with Treated or Coated Surfaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996
- [6] Seitzl S., Knésl Z.: *Two parameter fracture mechanics: Prediction of the direction of crack growth*, Conference Eng. Mechanics, Vol. **4**, Svratka, 2000
- [7] Sládek J., Sládek V., Fedelinski P.: *Contour integrals for mixed-mode crack analysis: effect of nonsingular terms*, Theoretical and Appl. Mech. **27**, pp. 115–127, 1997
- [8] Yang B., Ravi-Chandar K.: *Evaluation of elastic T-stress by the stress difference method*, Eng. Fracture Mechanics **64**, pp. 589–605, 1999