



ARMA MODEL AS SEISMIC EXCITATION

Cyril Fischer*, Jiří Náprstek†

Summary: The response of a linear structure subjected to non-stationary random excitation can be determined using the correlation method. This method is extended to accept excitation by a non-white non-stationary ARMA-model. The excitation ARMA model is constructed in such a way to fit stochastical characteristics of a true seismic process.

Key words: Stochastic process; Random excitation

1 Úvod

Metody výpočtu odezvy stavebních konstrukcí na náhodné buzení jsou omezeny řadou předpokladů, které je nutno klást na uvažované buzení. Některé metody uvažují zcela nerealistické buzení (modulovaným) bílým šumem, jindy se omezují na zcela konkrétní tvar spektrální hustoty či modulace. Běžně neuvažují frekvenční nestacionaritu budícího procesu. V předchozích pracích jsme uvedli metody vhodné pro (takřka) libovolné modulace reprezentované splajnem. Pokud se takové metody doplní frekvenčním rozkladem, vznikne kombinovaná metoda schopná postihnout i nestacionaritu buzení ve frekvenční oblasti.

Předkládaná práce obsahuje modifikaci korelační metody (původně uvedené v [Náprstek, Fischer O. 1995]) pro buzení modulovaným ARMA procesem. Hlavní výhodou ARMA modelu je možnost používat různé tvary spektrální hustoty, díky čemuž je možno lépe postihnout charakter náhodného buzení. Tvar spektrální hustoty

$$\psi(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{2a^2b}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \quad (1)$$

používané v předchozích pracích je zvláštním případem ARMA(2,0) modelu.

S přihlédnutím k faktu, že numerické řešení úloh probíhá v diskrétních krocích, jakož i k tomu, že záznamy naměřených náhodných procesů jsou diskrétní, použili jsme teorii diskrétních ARMA procesů.

2 Metoda

Pohyb lineární soustavy tuhých těles vybuzený pohybem podloží (například při zemětřesení) se popisuje rovnicí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{v}(t) \quad (2)$$

kde \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{C} – jsou reálné konstantní čtvercové matice rozměru $n \times n$

\mathbf{F} , \mathbf{G} – reálné konstantní obdélníkové matice typu $n \times m$

$\mathbf{u}(t)$ – sloupcový vektor odezvy odpovídající posunům (n)

$\mathbf{v}(t)$ – sloupcový vektor předepsaných posunů v podporách (m).

*Cyril Fischer, Ústav teoretické a aplikované mechaniky AVČR, Prosecká 76, 190 00 Praha 9; tel. +420 2 86882121, e-mail: fischerc@itam.cas.cz

†Ing Jiří Náprstek, DrSc, Ústav teoretické a aplikované mechaniky AVČR, Prosecká 76, 190 00 Praha 9; tel. +420 2 86882121, e-mail: naprstek@itam.cas.cz

Pro jednoduchost předpokládejme, že $\mathbf{v}(t) = v(t)$ je skalární funkce a \mathbf{F}, \mathbf{G} jsou sloupcové vektory, $v(t_i) = m(t_i)\eta_i$, kde t_i jsou časové okamžiky $t_i = i\Delta t$, $m(t)$ je deterministická modulační funkce a $\eta(t)$ taková, že $\eta(t_i) = \eta_i$ je náhodná posloupnost modelu ARMA použitého pro modelování náhodného buzení.

2.1 Přímá část

Jako první krok převedeme rovnici (2) na diferenciální rovnici prvního řádu

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{U}(t) + \tilde{\mathbf{F}}m(t)\dot{\eta}(t) + (\tilde{\mathbf{F}}\dot{m}(t) + \tilde{\mathbf{G}}m(t))\eta(t) \quad (3)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{F}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $\mathbf{U}(0) = \mathbf{0}$. Označme pravou stranu rovnice (3) jako $\mathbf{f}(t) = \tilde{\mathbf{F}}m(t)\dot{\eta}(t) + (\tilde{\mathbf{F}}\dot{m}(t) + \tilde{\mathbf{G}}m(t))\eta(t)$. Řešení rovnice (3) je možno hledat pomocí Duhamelova integrálu ve tvaru

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{Q}(t-t_0)}\mathbf{U}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{Q}(t-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (4)$$

Neboť budící funkce $\eta(t)$ je definovaná pouze hodnotami v bodech t_i , můžeme ji uvažovat jako lineární:

$$\eta(t) = \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) + \eta_{i-1} \text{ pro } t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$$

Stejným způsobem můžeme approximovat modulační funkci $\mu_i = m(t_i)$.

$$m(t) = \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) + \mu_{i-1} \text{ pro } t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$$

Integrál v rovnici (4) je pak přepsat do tvaru

$$\mathbf{U}(t_j) = e^{\mathbf{Q}(t_j-t_0)}\mathbf{U}(t_0) + \sum_{i=1}^j e^{\mathbf{Q}(t_j-t_i)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\mathbf{Q}(t_i-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (5)$$

což odpovídá rekurentnímu vztahu

$$\mathbf{U}(t_j) = e^{\mathbf{Q}(t_j-t_{j-1})}\mathbf{U}(t_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{\mathbf{Q}(t_j-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (6)$$

Označíme-li

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{1,i} &= \mathbf{Q}^{-3} \left(4\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} + e^{\mathbf{Q}\Delta t_i} \right) (2\mathbf{I} - \mathbf{Q}\Delta t_i) \right) (\mathbf{G} + \mathbf{Q}\mathbf{F}) \\ \mathbf{s}_{2,i} &= \Delta t_i^2 \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{G}, \quad \mathbf{s}_{3,i} = 2\mathbf{Q}^{-3} (\mathbf{Q}\Delta t_i - \mathbf{I}), \quad \mathbf{s}_{4,i} = 2\Delta t_i \mathbf{Q}^{-2} \end{aligned}$$

dostaneme po dosazení za $m(t)$ a $\eta(t)$ a výpočtu výraz pro integrál

$$\mathbf{S}_{1,i} = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{s}_{1,i}\mu_{i-1} + (-\mathbf{s}_{2,i} + (\mathbf{s}_{3,i} - \mathbf{s}_{4,i})(\mathbf{G} + \mathbf{Q}\mathbf{F}))\mu_i)$$

$$\mathbf{S}_{2,i} = \frac{1}{\Delta t^2} \left(\mathbf{s}_{1,i}\mu_i + \left(e^{\mathbf{Q}\Delta t_i} \mathbf{s}_{2,i} + (\mathbf{s}_{3,i} - e^{\mathbf{Q}\Delta t_i} \mathbf{s}_{4,i})(\mathbf{G} + \mathbf{Q}\mathbf{F}) \right) \mu_{i-1} \right)$$

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{\mathbf{Q}(t_j - \tau)} \mathbf{f}(\tau) d\tau = \mathbf{S}_{1,i} \eta_i + \mathbf{S}_{2,i} \eta_{i-1}$$

takže rekurentní formuli (6) je možno zapsat maticově

$$\mathbf{U}_{i+1} = e^{\mathbf{Q}\Delta t_i} \mathbf{U}_i + \mathbf{S}_{1,i} \eta_i + \mathbf{S}_{2,i} \eta_{i-1} \quad (7)$$

Případný konstantní časový krok $\Delta t_i = \Delta t$ výpočet zjednoduší, není však nezbytný.

2.2 Popis buzení

Obecný ARMA(p, q) proces splňuje rovnost (viz [Anděl 76])

$$\eta_n - \sum_{i=1}^p \varphi_i \eta_{n-i} = w_n - \sum_{i=1}^q \theta_i w_{n-i} \quad (8)$$

Koeficienty φ_i a θ_i modelu je nutno určit z požadovaného tvaru spektrální hustoty a $\{w_n\}$ je reálná posloupnost nekorelovaných náhodných veličin (bílý šum). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\{w_n\}$ je centrovaná, t. j. $Ew_n = 0$, $Ew_n w_n = \sigma^2$. Rovnost (8) je možno zapsat rovněž v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta}_n + \boldsymbol{\rho}_{n+1} \quad (9)$$

kde

$$\boldsymbol{\eta}_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \eta_{n-1} \\ \vdots \\ \eta_{n-p+1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\rho}_n = \begin{pmatrix} w_n - \sum_{j=1}^q \theta_j w_{n-j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_p \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nyní rozšířme vektor neznámých posunů a rychlostí \mathbf{U}_i o neznámé hodnoty buzení $\boldsymbol{\eta}_i$ a rovnici (7) rovnicí (9). Po dosazení $\mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_n \\ \boldsymbol{\eta}_n \end{pmatrix}$ bude

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Z}_i \mathbf{Y}_i + \mathbf{r}_{i+1} \quad (10)$$

kde

$$\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{Q}\Delta t_i} & \mathbf{T}_i \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix}, \mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\rho}_i \end{pmatrix}$$

Matice \mathbf{T}_i bude mít tvar

$$\mathbf{T}_i = (\mathbf{S}_{1,i}, \mathbf{S}_{2,i}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$$

2.3 Výpočet kovarianční matice

Výpočet disperse odesvy je možno provést podle definice kovarianční funkce pro proměnné \mathbf{Y}_i definované rekurencí (10) za předpokladu, že matematický střed odesvy bude nulový. To je splněno jednak pro lineární úlohy (2), jednak pro symetrické nelineární úlohy.

Kovariance systému bude

$$E\mathbf{Y}_{i+1}\mathbf{Y}_{i+1}^T = \mathbf{Z}_i E\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_i^T \mathbf{Z}_i^T + \mathbf{Z}_i E\mathbf{Y}_i \mathbf{r}_{i+1}^T + (Z_i E\mathbf{Y}_i \mathbf{r}_{i+1}^T)^T + E\mathbf{r}_{i+1} \mathbf{r}_{i+1}^T$$

Platí:

$$E\mathbf{r}_{i+1} \mathbf{r}_{i+1}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, c = \left(1 + \sum_{i=1}^q \theta_i^2\right) \sigma^2$$

nenulový prvek c je na pozici $(n+1, n+1)$, je-li n délka vektoru \mathbf{U}_i . Pro výpočet $\mathbf{Z}_i \mathbf{E} \mathbf{Y}_i \mathbf{r}_{i+1}^T$ stačí uvážit části vektorů týkající se ARMA modelu. Rekurentním použitím rovnosti (9) dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T &= \mathbf{E} (\Phi \boldsymbol{\eta}_{i-1} + \boldsymbol{\rho}_i) \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T = \Phi \mathbf{E} \boldsymbol{\eta}_{i-1} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T + \mathbf{E} \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T \\ &= \mathbf{E} (\Phi (\Phi \boldsymbol{\eta}_{i-2} + \boldsymbol{\rho}_{i-1}) + \boldsymbol{\rho}_i) \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T = \Phi^2 \mathbf{E} \boldsymbol{\eta}_{i-2} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T + \Phi \mathbf{E} \boldsymbol{\rho}_{i-1} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T + \mathbf{E} \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T \\ &\vdots \\ &= \Phi^q \mathbf{E} \boldsymbol{\eta}_{i-q} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T + \Phi^{q-1} \mathbf{E} \boldsymbol{\rho}_{i-q+1} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T + \dots + \Phi \mathbf{E} \boldsymbol{\rho}_{i-1} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T + \mathbf{E} \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T\end{aligned}$$

V poslední rovnici je možno říci, že $\mathbf{E} \boldsymbol{\eta}_{i-q} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T = 0$, neboť ve všech sčítancích bude $\mathbf{E} \boldsymbol{\eta}_k w_l$ pro $k < l$. Dále platí, že

$$\mathbf{E} \boldsymbol{\rho}_{k-j} \cdot \boldsymbol{\rho}_k^T = \begin{pmatrix} (-\theta_j + \sum_{i=1}^{q-j} \theta_i \theta_{i+j}) \sigma^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

pro $j = 1, \dots, q$. Je tedy

$$\mathbf{E} \boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T = \sum_{j=1}^q \Phi^{j-1} \mathbf{E} \boldsymbol{\rho}_{i+1-j} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^T$$

3 Parametry ARMA modelu

Parametry ARMA modelu je možno zvolit podle požadovaného tvaru spektrální hustoty. Při určení těchto parametrů je nutno rovněž vzít v úvahu hodnotu Δt , neboť tato hodnota má vliv na rozptyl či intenzitu bílého šumu $\{w_k\}$. Jediným omezením, podmíněným stabilitou výpočtu, je nutnost, aby determinant $\det |\Phi| < 1$. Poznamenejme, že $\det |\Phi| = |\varphi_p|$.

Podle [Zhang a Zheng 1999] je možno Kanai–Tajimi spektrum [Tajima 1960], používané v seismickém inženýrství a definované jako

$$S(\omega) = \frac{S_0}{2\pi} \frac{\omega_g^4 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2) + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2}$$

definovat jako ARMA(2,1) model s parametry

$$\varphi_1 = 2e^{-a_1 \Delta t} \cos b_1 \Delta t \quad \varphi_2 = e^{-2a_1 \Delta t} \quad \theta_1 = -c \pm \sqrt{c^2 - 1} \quad (|\theta_1| \leq 1)$$

kde

$$a_0 = \frac{2\zeta_g}{\omega_g} \quad a_1 = -\zeta_g \omega_g \quad b_1 = \omega_g \sqrt{1 - \zeta_g}$$

a konečně

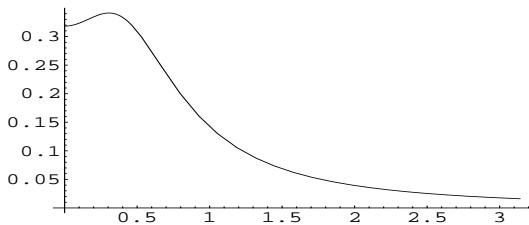
$$\sigma^2 = \frac{b_1(1 + a_0^2 \omega_g^2) \sinh(2a_1 \Delta t) - a_1(1 - a_0^2 \omega_g^2) \sin(2b_1 \Delta t) S_0}{2a_1 b_1 (a_1^2 + b_1^2) e^{2a_1 \Delta t} \omega_g}$$

4 Numerický příklad

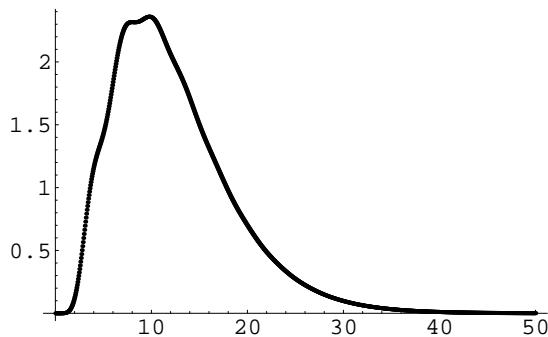
Jako příklad ukážeme rozptyl odezvy jednoduchého oscilátoru

$$\ddot{x}(t) + 2h\omega_0 \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \dot{v}(t) + v(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

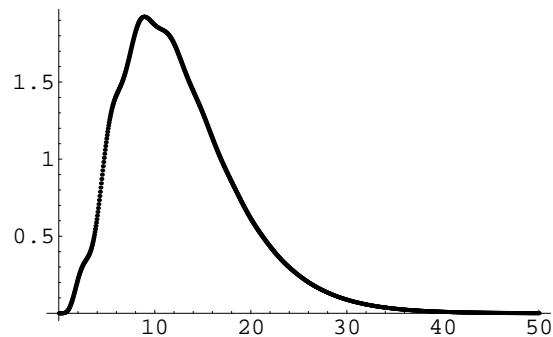
pro hodnoty $\omega_0 = 0.31\pi$, $h = 0.15$ a parametry ARMA modelu $\varphi_1 = 1.94797$ a $\varphi_2 = -0.950279$, $\theta_1 = 0.9712127$, $\sigma = 1.51$, $\Delta t = 0.05$. Spektrální hustota buzení podle Kanai-Tajimi je vykreslena na obrázku 1. Její vrchol zhruba odpovídá vlastní frekvenci oscilátoru. Rozptyl odezvy je je na obrázcích 2 a 3 (po řadě posun a rychlosť).



Obr. 1 Spektrální hustota buzení



Obr. 2 Rozptyl posunu odezvy oscilátoru



Obr. 3 Rozptyl rychlosti odezvy oscilátoru

5 Závěr

V předkládané práci navrhujeme numerický výpočet stochastických charakteristik odezvy lineární soustavy na Gaussovské nestacionární buzení reprezentované modulovanou posloupností vyhovující obecnému ARMA modelu. Uvedenou metodu je možno poměrně jednoduše zobecnit i pro symetrické ne-lineární problémy. Není vhodná pro příliš rozsáhlé soustavy. Hlavní výpočetní nápor je soustředěn do výpočtu maticové exponenciely a LU rozkladu matice \mathbf{Q} , jejíž dimenze je rovna dvojnásobku dimenze soustavy.

Poděkování: Práce vznikla za podpory grantů GAAVČR No. A 271002/00 a GAČR 103/96/KO34. Text byl upraven procesorem LyXa L^AT_EX.

References

- [Anděl 76] Anděl, Jiří: *Statistická analýza časových řad*, SNTL, 1976
- [Náprstek, Fischer O. 1995] Náprstek, J. & Fischer O. 1995, Correlation analysis of non-stationary vibrations of a large system excited by seismic process. C.A.Brebbia, A.S.Cakmak eds, *7th Int. Conf. Soil Dynamics and Earthquake Engineering '95*, Wessex Inst. of Techn., Chania (Greece), Comp.Mech.Publ., Southampton-Boston, pp.607-614.
- [Tajima1960] Tajima, H., A Statistical Method fo Determining The Maximum Response of a Building Structure During Earthquake. *Proc. of the Second World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo and Kyoto, Japan*, Vol. II, July 1960
- [Zhang a Zheng 1999] Zhang, L., Zu, J. W., Zheng, Z. The stochastic Newmark algorithm for random analysis of multi-degree-of-freedom nonlinear systems, *Computers and structures*, **70** (1999), pp. 557–568