National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2001
Svratka, Czech Republic, May 14 – 17, 2001

INTERACTION OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID AND ELASTIC VOCAL FOLDS

Alexandr Damašek*, Pavel Burda†

Summary: *The paper analyses numerical computations of vibrations of vocal folds and their interaction with flowing air using the finite element method. Domain decomposition algorithm for simultaneous integration in time of coupled system of Navier-Stokes equations and equations of linear elasticity is described. Numerical results are presented and accuracy of computations is discussed.*

Key words: *Fluid-structure interaction, vocal folds, finite elements.*

1 Úvod

Z hlediska lékařské praxe je rozvíjení diagnostiky hlasivek velice důležitou součástí tohoto oboru. Lidský hlas je vytvářen pomocí vibrací hlasivkového svalu vlivem proudícího vzduchu. Hlasivka se vedle vlastního svalu skládá z vazu a povrchového epitelu. V hlasivkové štěrbině dochází ke složitým interakcím proudícího vzduchu s kmitající tkání. Proto se ukazuje potřeba podrobného matematického modelu, který by umožnil poměrně přesně popsat dynamické a aeroelastické děje v hlasivkách.

2 Matematická formulace

Mějme vazkou, nestlačitelnou tekutinu, zaujímající oblast $\Omega_f \subset I\!R^3$ a lineárně elastické těleso zaujímající oblast $\Omega_s \subset I\!R^3$. Předpokládáme společnou část hranice $\Gamma_I \subset \partial\Omega_s \cup \partial\Omega_f$. Vektor n se složkami (n_1, n_2, n_3) nechť značí jednotkovou vnější normálu k hranici $\partial\Omega$.

Uvažujme teorii malých posunutí (u_1, u_2, u_3), $u_i = u_i(x,t)$, $i = 1,2,3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $t \in (0,T)$ na oblasti Ω_s. Cauchyův tensor napětí $\sigma_{ij}(x,t)$ na Ω_s je dán Hookovým zákonem

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}(u)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(u). \tag{1}$$

Zde $\lambda(x)$, $\mu(x)$ jsou Lamého koeficienty, e_{ij} je tensor malých deformací,

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\ i,j = 1,2,3, \tag{2}$$

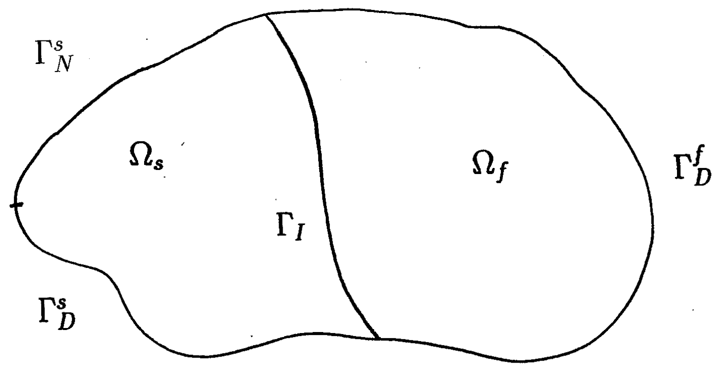
δ_{ij} značí Kroneckerův symbol.

Tekutina, zaujímající oblast Ω_f, je popsána Navier-Stokesovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v - \nu\Delta v + \nabla p &= f, \\ \text{div } v &= 0 \text{ v } \Omega_f \times (0,T), \end{aligned} \tag{3}$$

*Ing. Alexandr Damašek, Ústav termomechaniky AVČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8; tel. +420 2 6605 3783, e–mail: damasek@it.cas.cz

†Doc. RNDr. Pavel Burda, CSc., Katedra technické matematiky, Fakulta strojní ČVUT, Karlovo náměstí 13, Praha 2; tel. +420 2 2435 7565, e–mail: burda@fsik.cvut.cz



Obrázek 1: *Oblast tekutiny (vzduchu) a elastického tělesa (hlasivek)*

kde $f = f(x,t)$ jsou objemové síly.
Napětí v tekutině je dáno vztahem

$$\tau_{ij} = \rho_f \left[-p\delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right], \tag{4}$$

kde v_i, $i = 1,2,3$ jsou složky rychlosti, p tlak normalisovaný hustotou ρ_f, ν kinematický koeficient vazkosti. Na oblasti Ω_s musí být splněna rovnováha sil

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \text{ na } \Omega_s \times (0,T). \tag{5}$$

Na části hranice Γ_D^s jsou předepsána posunutí,

$$u = u_D \text{ na } \Gamma_D^s. \tag{6}$$

Na části hranice Γ_D^f předepisujeme Dirichletovské okrajové podmínky,

$$v = v_D. \tag{7}$$

Na kontaktní ploše mezi elastickým tělesem a tekutinou Γ_I je třeba, aby byla splněna

1. podmínka spojitosti všech složek normálových napětí

$$\tau_{ij} n_j^f = \sigma_{ij} n_j^s \text{ na } \Gamma_I, \quad n_j^f = -n_j^s, \tag{8}$$

2. podmínka spojitosti všech složek rychlosti

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = v_i, \text{ i} = 1,2,3 \text{ na } \Gamma_I. \tag{9}$$

Dále je nutné předepsat odpovídající počáteční podmínky v čase $t = 0$,

$$\begin{aligned} u(x,0) = u_0(x),\ \dot{u}(x,0) &= u_1(x),\ x \in \Omega_s, \\ v(x,0) &= v_0(x),\ x \in \Omega_f. \end{aligned} \tag{10}$$

3 Řešení vázaného problému metodou domain-decomposition

Postup výpočtu jedné prostorové iterace pro nalezení řešení v čase t^{n+1}, známe-li řešení v časových krocích $t^1, \ldots, t^n$ lze popsat následovně (srovnej [3])

1. zvolme v_I^{n+1} na Γ_I
   (obvykle volíme $v_I^{n+1} = v_I^n$ již spočtené, pro $n = 0$ počáteční podmínky)

2. v Ω_f najdeme v, p v čase t^{n+1} splňující

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v - \nu\Delta v + \nabla p &= f, \\ \text{div } v &= 0 \quad \text{v } \Omega_f \end{aligned} \tag{11}$$

   s počáteční podmínkou $v(x, t^n) = v^n(x), x \in \Omega_f$
   a okrajovou podmínkou $v(x, t^{n+1}) = v_I^{n+1}(x)$ na Γ_I

3. na Γ_I vypočteme napětí

$$\tau_{ij}(v) = \rho_f \left[-p\delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial v_i^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{n+1}}{\partial x_i} \right) \right] \tag{12}$$

4. v Ω_s určíme $u(x, t^{n+1})$ jakožto řešení problému

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\text{s počátečními podmínkami} \\ u_i(x, t^n) &= u_i^n(x), \\ \dot{u}_i(x, t^n) &= \dot{u}_i^n(x), \ x \in \Omega_s \\ &\text{a okrajovou podmínkou} \\ \sigma_{ij}(u(x, t^{n+1}))n_j^s &= \tau_{ij}(v(x, t^{n+1}))n_j^f \text{ na } \Gamma_I \end{aligned}$$

5. v Ω_s vypočteme $\dot{u}_i(t^{n+1})$ a položíme na Γ_I novou aproximaci rychlosti rovnu, například

$$\begin{aligned} v_i^{NEW} &:= 0,5(v_i + \dot{u}_i) \\ (\text{nebo } v_i^{NEW} &:= \gamma v_i + (1-\gamma)\dot{u}_i \end{aligned}$$

   pro nějaké reálné číslo $\gamma \in [0, 1)$).

3.1 Numerické řešení vazké nestlačitelné tekutiny metodou konečných prvků

Pro diskretisaci metodou konečných prvků používáme Hood-Taylorovy prvky P2/P1, kde jsou hodnoty rychlostí zadány v rozích a středech hran kostky či pětistěnu, případně čtyřstěnu a hodnoty tlaku jen v rozích. Potom jsou složky rychlosti i tlaku aproximovány jako spojité funkce v prostorových proměnných [1],[4]. Navier-Stokesovy rovnice v bodě 2 algoritmu domain-decomposition řešíme semiimplicitní metodou. Při časové diskretisaci nahradíme na $n + 1-$ té časové vrstvě derivaci rychlosti podle času Eulerovou zpětnou diferencí, nelineární člen nahradíme

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \approx (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+1}. \tag{14}$$

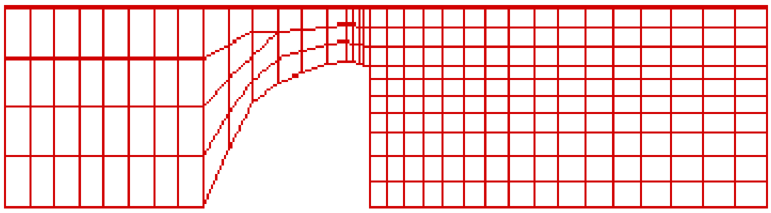
Rozepsáním hledaných rychlostí a tlaků jako lineárních kombinací tvarových funkcí dostaneme vyjádření matic a pravých stran pro metodu konečných prvků.

3.2 Numerické řešení dynamiky elastického kontinua

Pro řešení kmitání elastického kontinua v bodě 4 schématu použijeme Newmarkovu metodu [2]. Pro prostorovou diskretisaci struktury jsou použity kvadratické isoparametrické konečné prvky.

4 Proudění samotné tekutiny podél tuhého profilu hlasivek

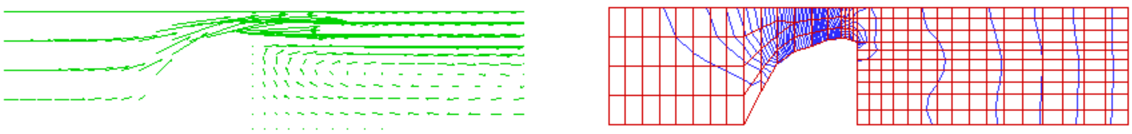
Nejprve jsme uvažovali samotné 2D proudění vazké nestlačitelné tekutiny v prostoru daném profilem hlasivek bez uvažování elasticity stěn. Proudění jsme nechali rozvinout z klidového do stacionárního stavu. Síť konečných prvků pro vzduch obtékající hlasivky je na obr. 2, stacionární rychlostní a tlakové pole na obr. 3.



Obrázek 2: *Síť oblasti tekutiny obtékající hlasivky*

Proudění uvažujeme pro následující parametry:

Vstupní rychlost tekutiny v ose y:	v_{in}	$=$	$1[m.s^{-1}]$
Kinematická viskozita:	ν	$=$	$0.00015[m^2.s^{-1}]$
Hustota tekutiny:	ρ	$=$	$1.0[kg.m^{-3}]$
Reynoldsovo číslo:	Re	$=$	246.6667



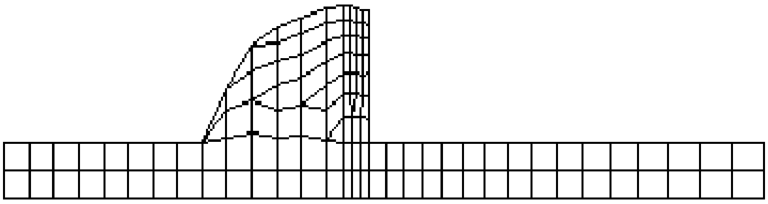
Obrázek 3: *Vektory rychlostí a isolinie tlaků po dosažení stacionárního stavu*

5 Kmitání tělesa hlasivek bez uvažování proudící tekutiny

Pro model hlasivek uvažujeme homogenní tkáň se střední hodnotou Youngova modulu. Povrch hlasivek je namahán napětím od tekutiny, které začne působit v čase t_0. Pro zjištění mechanických vlastností hlasivek je rozhodující určení vlastních frekvencí a vlastních tvarů. Vlastní frekvence jsou určeny přímým výpočtem problému vlastních čísel a vlastních tvarů, jedná se o metodu iterace podprostoru. Kromě toho jsou vlastní frekvence ještě zjištěny Fourierovou metodou. Dále je počítána jednak varianta bez vnitřního tlumení struktury a jednak varianta s vnitřním tlumením, jehož koeficient byl nastaven na hodnotu DAMP $= 1{,}005$. Vnitřní tlumení struktury je proporcionální k matici hmotnosti.

Pro vlastní tvorbu hlasu je rozhodující především příčná výchylka ve směru x, zatímco vliv podélné výchylky ve směru y nebude patrně tak významný.

Na následujícím obrázku je znázorněna síť pro oblast hlasivek.

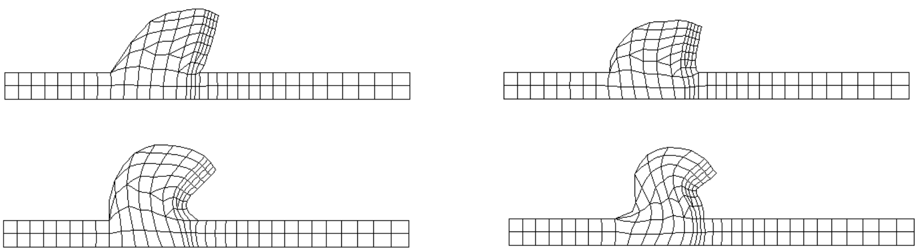


Obrázek 4: *Síť konečných prvků pro oblast hlasivek*

Pro kmitání elastického tělesa byly uvažovány tyto parametry:

Youngův modul	E	$=$	$8.10^3 [Pa]$
Poisonovo číslo	ν	$=$	0.3
Hustota materiálu	ρ	$=$	$1020 [kg.m^{-3}]$

Na dalších obrázcích jsou vykresleny první čtyři vlastní tvary hlasivek.



Obrázek 5: První čtyři vlastní tvary tělesa hlasivek

Vlastní frekvence jsou zjišťovány pomocí metody iterace podprostoru a pomocí Fourierovy transformace (FFT).

Vypočtené vlastní frekvence metodou iterace podprostoru pro strukturu bez uvažování vnitřního tlumení jsou uvedeny níže:

F1	=	68.65	Hz
F2	=	124.9	Hz
F3	=	147.1	Hz
F4	=	241.1	Hz

Vlastní frekvence zjištěné pomocí Fourierovy transformace pro strukturu s hodnotou vnitřního tlumení DAMP=1.005 jsou následující:

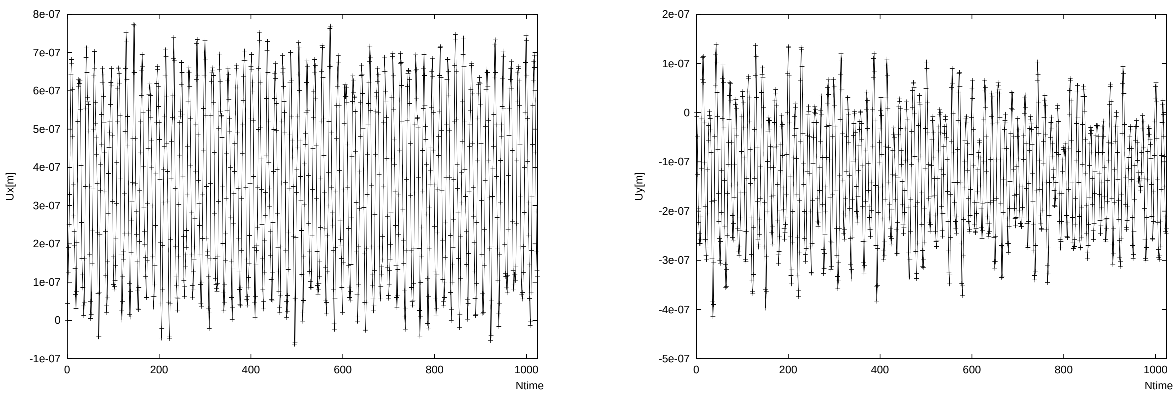
F1	=	64.5	Hz
F2	=	119.8	Hz
F3	=	138.25	Hz
F4	=	221.2	Hz

Z obou případů je vidět, že díky vnitřnímu tlumení struktury došlo k určitému posunutí vlastních frekvencí k nížším hodnotám.

6 Interakce vazké nestlačitelné tekutiny s elastickou stěnou hlasivek

Problém interakce byl řešen popisovaným algoritmem domain-decomposition s časovým krokem $\tau = 0.0005$ s Relativní přesnost prostorových iterací je dána normou rozdílu rychlosti tekutiny na rozhraní v^f a rychlosti výchylky struktury na rozhraní v^s. Norma rozdílu $\|v^f - v^s\|_{L^2(\Gamma_I)}$ byla nastavena na hodnotu $\varepsilon = 10^{-5}$ a pro dosažení konvergence bylo potřeba 6-15 prostorových iterací.

Nejprve jsme z důvodu porovnání vlastních frekvencí mezi samotným kmitáním struktury a interakcí uvažovali stejný koeficient tlumení DAMP=1,005, přestože takto nastavený systém nevykazuje dostatečný útlum a hodnota koeficientu zdaleka neodpovídá hodnotám z experimentu.



Obrázek 6: Časové průběhy kmitů $u_x[m]$ a $u_y[m]$

Vlastní frekvence zjištěné pomocí Fourierovy transformace pro případ vnitřního tlumení DAMP=1.005 a vstupní rychlosti $v_{in} = 1m/s$ jsou tyto:

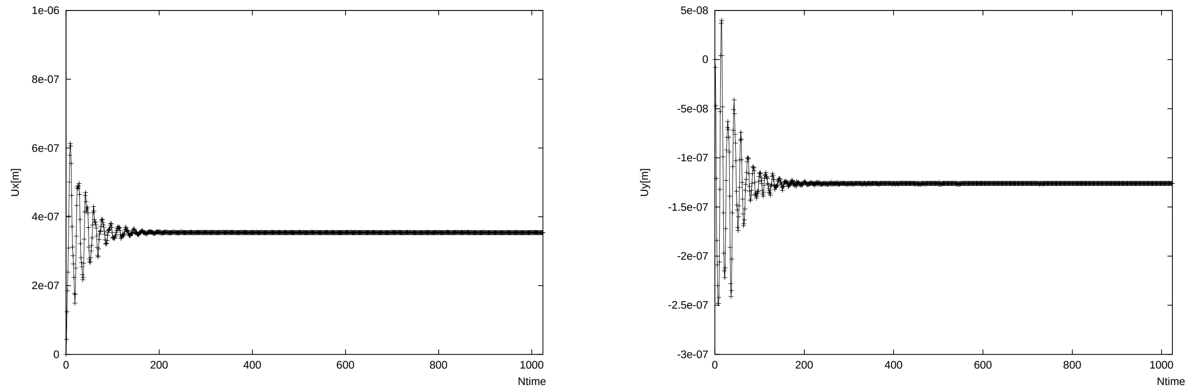
F1	=	64.5	Hz
F2	=	119.8	Hz
F3	=	142.9	Hz
F4	=	248.85	Hz

Z porovnání hodnot vlastních frekvencí samotné kmitající struktury a hodnot vlastních frekvencí odpovídajících interakci elastické struktury s proudící tekutinou vyplývá, že bylo dosaženo dobré shody.

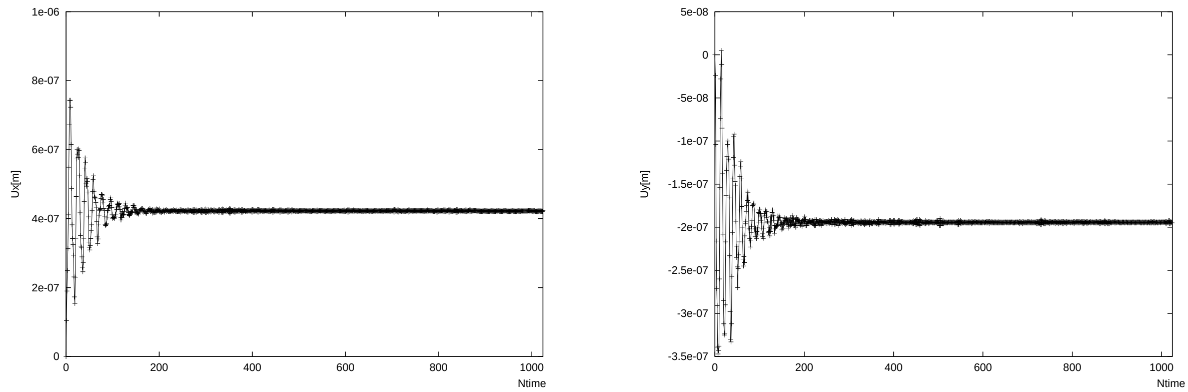
V dalším postupu jsme nastavili koeficient tlumení na hodnotu DAMP=112,15, čímž je uvedena v soulad s hodnotou $\xi = 0,13$, získanou experimentálně. Na následujících obrázcích jsou uvedeny časové průběhy výchylek ve směru x a y pro hodnotu tlumení DAMP = 112.15 a pro hodnotu vstupní rychlosti $v_{in} = 1m/s$, $v_{in} = 2m/s$, $v_{in} = 10m/s$.

Na průbězích výchylek lze pozorovat, že dojde k poměrně rychlému utlumení asi po 100 krocích, odpovídajícím 0.05 s. Dále je patrné, že se zvyšující se rychlostí dochází k jakémusi odtékání tělesa hlasivek ve směru proudění, a k určitému přelévání energie, definované postupným přesouváním nárůstu amplitud ze směru x do směru y. Ukazuje se, že jde o nelineární problém, neboť výchylka u_x se vzrůstající rychlostí nejprve rostla, ale pro rychlost $10m/s$ došlo dokonce k jejímu poklesu a k přenosu energie ve prospěch výchylky u_y.

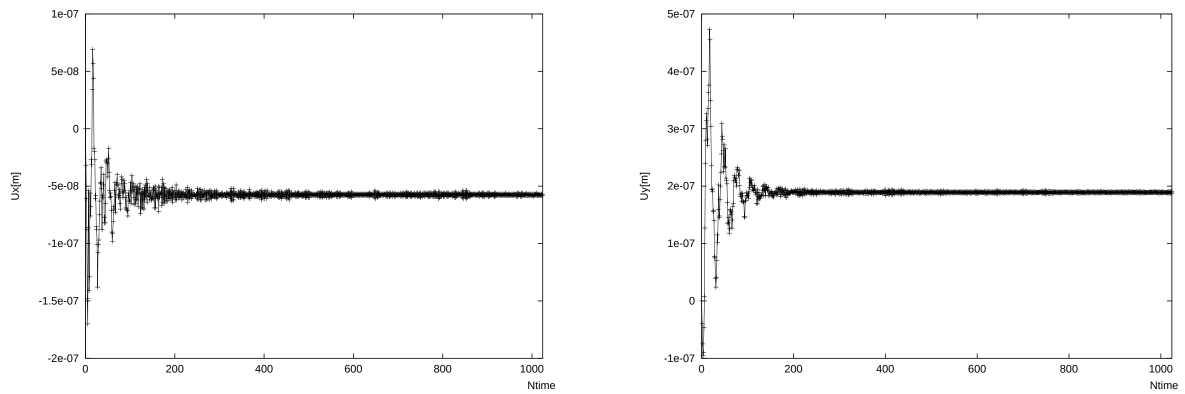
Z časových výchylek pro vstupní rychlost $v_{in} = 1m/s$ byly opět pomocí Fourierovy metody zjištěny vlastní frekvence. Dále byly pro stejný případ vstupní rychlosti ve dvou různých časech, odpovídajících horní a dolní amplitudě výchylky ve směru x, vykresleny deformace celé sítě struktury.



Obrázek 7: Časový průběh kmitů $u_x[m]$ a $u_y[m]$ pro $v_{in} = 1[m/s]$



Obrázek 8: Časový průběh kmitů $u_x[m]$ a $u_y[m]$ pro $v_{in} = 2[m/s]$



Obrázek 9: Časový průběh kmitů $u_x[m]$ a $u_y[m]$ pro $v_{in} = 10[m/s]$

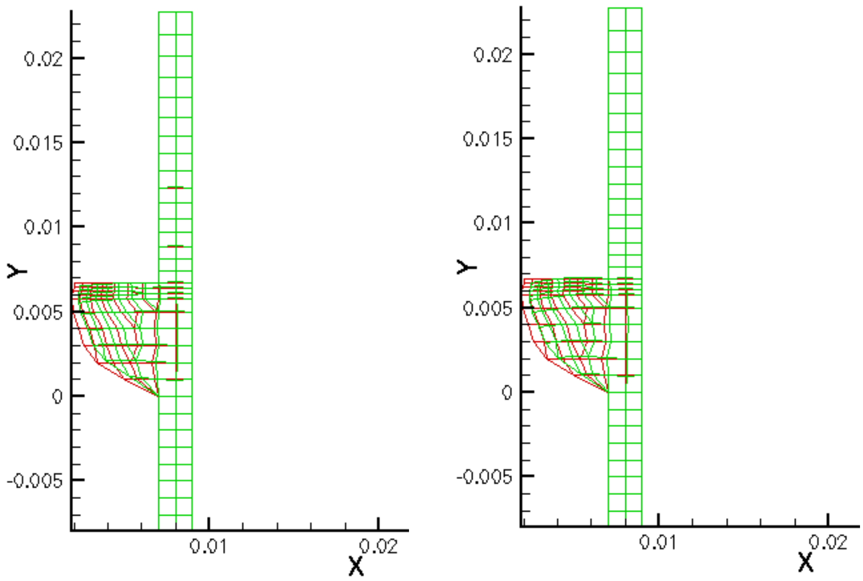
Vlastní frekvence zjištěné pomocí Fourierovy transformace pro případ vnitřního tlumení DAMP=112.15 a vstupní rychlosti $v_{in} = \mathit{1}m/s$ jsou následující:

F1	=	64.5	Hz
F2	=	119.8	Hz
F4	=	244.2	Hz

První i druhá vlastní frekvence odpovídají frekvencím pro předchozí případ interakce s nízkým vnitřním tlumením a vykazují tedy soulad s vlastními frekvencemi struktury bez uvažovaného vnitřního tlumení. Třetí vlastní frekvence je z amplitudo-frekvenčního spektra dané odezvy neidentifikovatelná, neboť z důvodu blízkosti s druhou vlastní frekvencí a velkého vnitřního tlumení došlo ke spojení jejich resonančních vrcholů. Čtvrtá vlastní frekvence je oproti téže frekvenci v případě vnitřního tlumení s koeficientem DAMP=1.005 snížena.

Při výpočtech jsme zkoumali též vliv přesnosti ε prostorových iterací a vliv délky časového kroku τ na časový průběh výchylek struktury. Vliv přesnosti prostorových iterací (výpočty provedeny pro $\varepsilon = 10^{-5}$, $\varepsilon = 10^{-8}$) mezi tekutinou a strukturou se projevil na průběhu výchylek jen velmi nepatrnou změnou i když počet prostorových iterací se znatelně zvýšil (30-40 oproti 6-15) .

Volba délky časového kroku je určitým kompromisem mezi délkou kroku pro tekutinu a délkou kroku pro elastický materiál. Zatímco pro tekutinu řešenou semiimplicitním schématem volíme poněkud delší časový krok, pro elastický materiál popisovaný Newmarkovou metodou potřebujeme zvolit časový krok spíše kratší.



Obrázek 10: Výchylky v 9. a 25. časovém kroku ve směru x

References

[1] Gresho, P.M., Sani,R.L.: *Incompressible flow and the finite element method,* Wiley, 1998

[2] Hughes, T.J.R.: *The finite element method,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987

[3] Le Tallec,P.: *Domain decomposition methods in computational mechanics,* Computational mechanics advances **1** (1994), pp. 121-220, North-Holland 1994

[4] Pironneau, O.: *Finite element methods for fluids,* Masson-Wiley, 1989

Práce vznikla v rámci Komplexního projektu 106/98/K019 GA ČR, výzkumného záměru J04/98/210000003 MŠMT ČR a pilotního projektu 50344 Ústavu termomechaniky AV ČR