



STRESS STATE AT FEMUR AND TIBIA UNDER ORTHESE EFFECT

Jan Čulík*

Summary: *The stress state at child femur and tibia under force effects of corrective orthoses was observed at grant 106/00/0006 “Functional adaptation and patobiomechanics of limb and axial skeleton under force effects”. An algorithm of bones stress state calculation and a computer program is a top of the paper. The length and diameter of child femur and tibia, the position of a corrective orthoses and the force effect of screw are used as an input data of the algorithm and computer program. The space models of femur and tibia were composed with help a computer tomograph and according to measurements of prepared bones. The bone space model consists of sections perpendicular on bone axis with step 1 to 2 cm. It is proposed, if the bone isn't pathologic, the one bone space model can be transform to the other according to the length and thickness scale.*

The algorithm supposes that the orthoses screw force and its position is known (the special screws was developed). It is supposed that the orthoses and bones deformation is small with regard to the soft parts of leg and the press on unit length of leg is appositive propose to compressive deformation of soft leg tissue. The finite element method and the prismatic beam theory with respect Navier – Bernoulli's hypotheses are used for the calculation the load of bones, stress state and event. bending moments.

1. Úvod

V rámci grantu č. 106/00/0006 „Funkční adaptace a patobiomechanika končetinového a axiálního skeletu při silovém působení“ je vyšetřován stav napětí ve femuru a tibii při silovém působení ortézy. V článku je popsán algoritmus výpočtu napjatosti kostí a realizace algoritmu na počítači. Výchozími údaji pro odvození algoritmu výpočtu jsou délka a průměr femuru a tibie ošetřovaného dítěte, poloha ortézy na noze a síla ve šroubu ortézy. Pomocí počítačového tomografu a měření na preparovaných kostech byly sestaveny tvarové modely femuru a tibie. Tvarový model popisuje řezy kolmé na osu kosti s krokem od 1 do 2 cm. Předpokládá se, že pokud nemá femur a tibia dítěte patologický tvar, lze tvarový model získaný pro jiný femur a tibii transformovat podle délky a průměru kostí dítěte.

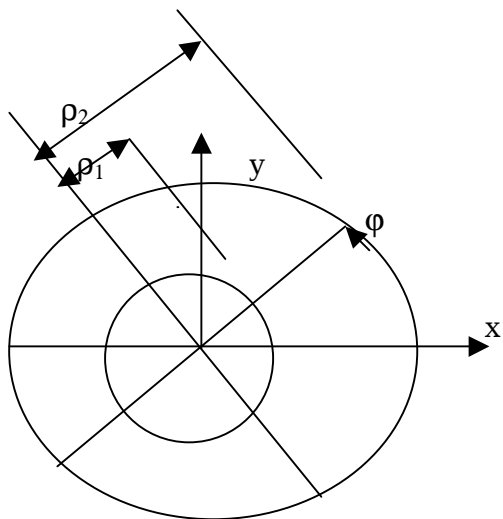
* Prof. Ing. Jan Čulík, DrSc., Katedra stavební mechaniky, Stavební fakulta ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, culik@fsv.cvut.cz

Aby bylo možno předpokládat, že je známá síla ve šroubu ortézy, musí existovat šrouby, ve kterých lze nastavit předem určené silové působení, které lze denní korekcí šroubu zachovat ve své konstantní velikosti. Takové šrouby byly v rámci úkolu vyvinuty. Po zhotovení ortézy změříme vzdálenost osy šroubu od kloubu ortézy. Předpokládá se, že při silovém působení ortézy je deformace ortézy a průhyb kosti zanedbatelný vzhledem ke stlačení měkkých tkání končetiny. Předpokládejme dále, že měkké tkáně končetiny mají konstantní modul pružnosti, tzn., že tlak ortézy na jednotku délky končetiny je úměrný stlačení měkké tkáně a nepřímo úměrný tloušťce stlačované tkáně (tlak je úměrný poměrnému stlačení).

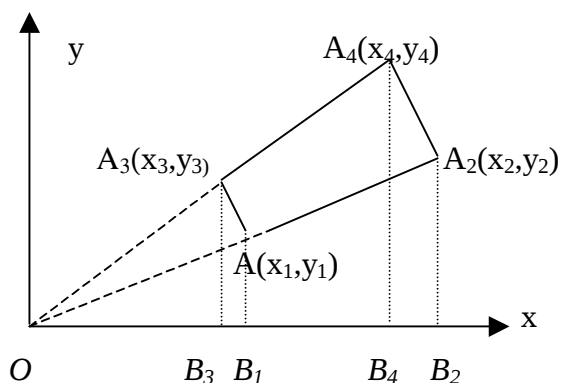
Vlivem tlakové síly ve šroubu (viz obr. 4) se ortéza nedeformuje, ale pouze se pootočí v kloubu. Zatížení na končetinu je odvozeno z podmínek rovnováhy síly ve šroubu a reakcí končetiny na ortézu. Napětí v kosti je počítáno podle teorie prismatických prutů užitím Navier – Bernoulliovy hypotézy o zachování rovinného průřezu po deformaci, tzn. pro vypočtené zatížení jsou odvozeny vztahy pro ohybové momenty a extrémní napětí ve všech průřezích. Pro výpočet napětí je nutné určit momenty setrvačnosti resp. průřezové moduly průřezů kostí.

2. MOMENTY SETRVAČNOSTI

Počítačovým tomografem a měřením na preparovaných kostech byl měřen vnitřní a vnější povrch femuru a tibie v řezech kolmých na osu kosti. V každém řezu byly měřeny polární souřadnice ρ_1, ρ_2 pro úhly φ s krokem 45° podle obr. 1. Pro výpočet momentu setrvačnosti byla každá výseč rozdělena na 5 částí a souřadnice vnitřního a vnějšího povrchu kosti na hranicích těchto částí byly určeny lineární interpolací. Vnitřní a vnější povrch kosti v těchto výsečích byl přibližně nahrazen úsečkou, tzn. plocha průřezu kosti byla pro výpočet momentu setrvačnosti přibližně nahrazena 40-ti (8x5) čtyřúhelníky, i-tý čtyřúhelník je nakreslen na obr. 2.



Obr.1. Kolmý řez kostí.



Obr.2. Část průřezu pro výpočet momentu

Moment setrvačnosti, statický moment plochy a plochu průřezu je možné vypočítat jako součet hodnot pro tyto čtyřúhelníky. Pro jeden čtyřúhelník podle obr. 2 určíme plochu A_1 trojúhelníka O, A_2, A_4 jako plochu trojúhelníka O, B_4, A_4 a plochu lichoběžníka B_4, B_2, A_2, A_4 a obdobně lze určit plochu A_2 trojúhelníka O, A_1, A_3 , tzn. platí

$$A_1 = \frac{x_4 y_2 - x_2 y_4}{2}, \quad A_2 = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2},$$

Celková plocha čtyřúhelníka $A_1 A_2 A_4 A_3$ je

$$A = A_1 - A_2$$

Pro statický moment plochy trojúhelníka soustředíme plochu do těžiště, po úpravě dostaneme:

$$S_z = A_1(x_2 + x_4) - A_2(x_1 + x_3)$$

Moment setrvačnosti trojúhelníka lze vypočítat tak, že třetiny ploch umístíme do poloviny stran. Pro čtyřúhelník $A_1 A_2 A_4 A_3$ po úpravě dostaneme:

$$I_y = \left[A_1(x_2^2 + x_4^2 + (x_2 + x_4)^2) - A_2(x_1^2 + x_3^2 + (x_1 + x_3)^2) \right] \frac{1}{12}$$

Po vypočtení hodnot pro celý průřez určíme těžiště

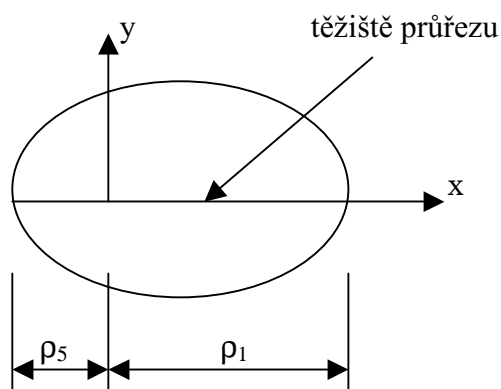
$$x_c = \frac{S_y}{A}$$

Moment setrvačnosti k těžišti je

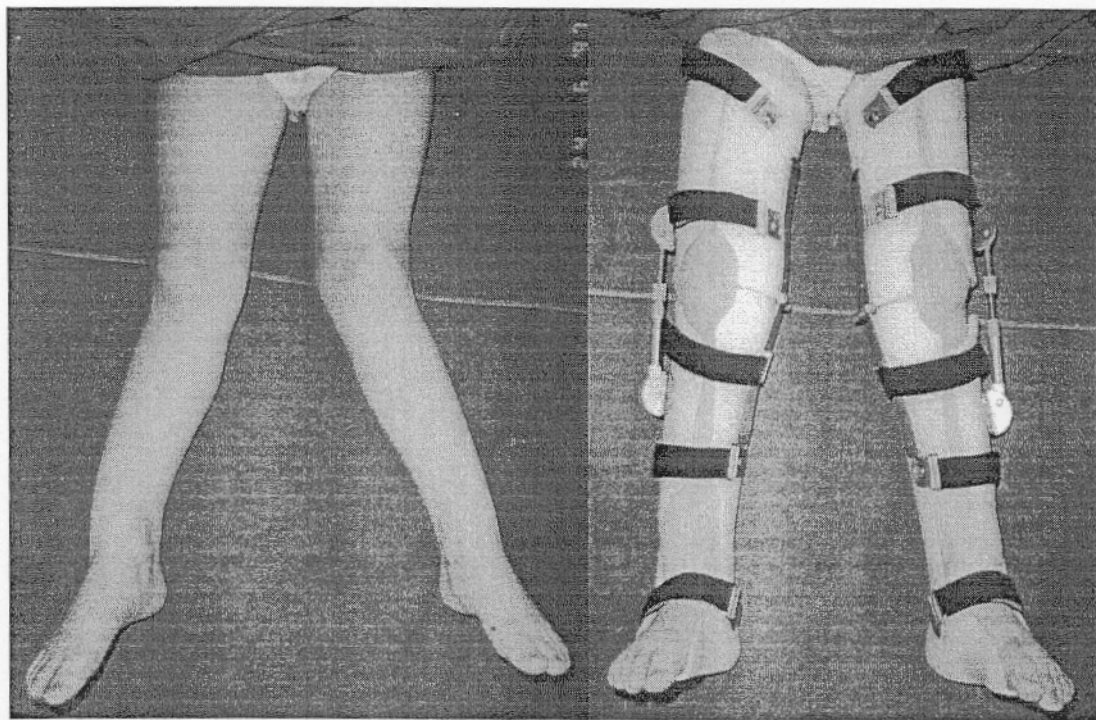
$$I_1 = I_y - A x_c^2$$

Průřezové moduly:

$$W_1 = \frac{I_1}{\rho_5 + x_c}, \quad W_2 = \frac{I_1}{\rho_1 - x_c}$$



Obr. 3. Průřez kostí, poloha těžiště



Obr. 4. Ortéza pro korekci valgozity.

3. ZATÍŽENÍ KOSTI

Na obr. 4 je nakresleno umístění ortézy na noze. Ortéza je vyrobena podle sádrového odlitku nohy dítěte a skládá se ze dvou částí spojených kloubem. Pomocí suchých zipů se ortéza připevní těsně na nohu a šroubem se zavede síla. Byly vyrobeny šrouby pro ortézy, které působí přesně zadanou silou F .

Na obr. 5 je nakresleno statické schéma silového působení ortézy. Ve šroubu působí síla F na rameni e od kloubu ortézy. Ortéza působí na nohu spojitým zatížením f . Účinkem síly F se stlačí měkká tkáň nohy a obě části ortézy se pootočí, část délky a se pootočí o úhel α , část délky b o úhel β . Vodorovné posuny vnitřního povrchu ortézy jsou v části délky a , resp. b dány vztahy

$$w_a = -\Delta + \operatorname{tg} \alpha x, \quad w_b = -\Delta + \operatorname{tg} \beta x', \quad (1)$$

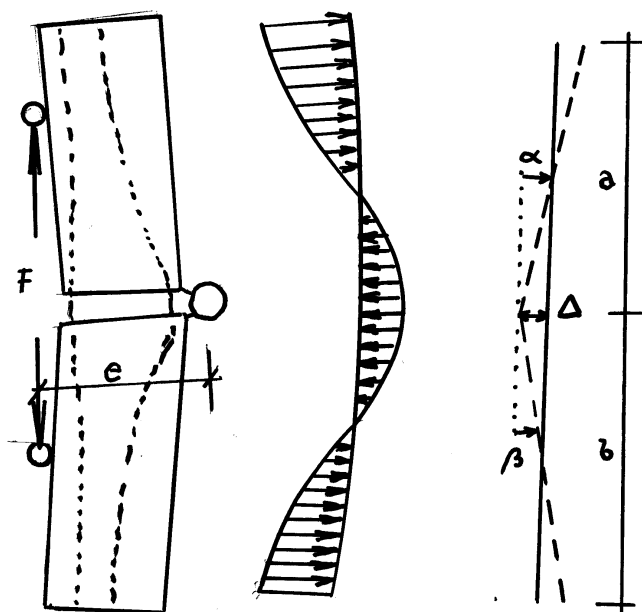
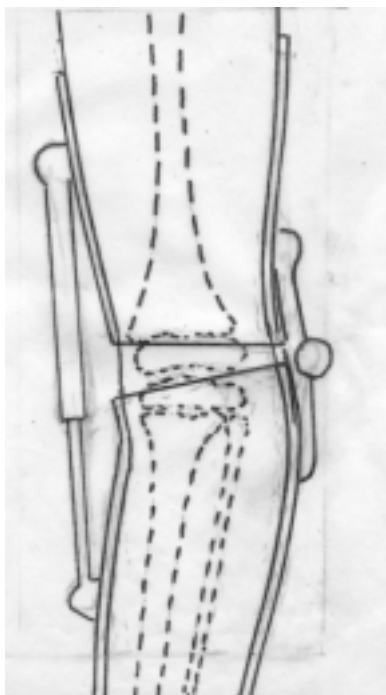
kde x, x' jsou svislé vzdálenosti od kloubu ortézy. Předpokládejme, že ortéza zatěžuje nohu na jednotku délky silou, která je úměrná stlačení měkké tkáně nohy (vodorovnému posunu) a nepřímo úměrná tloušťce stlačované části (síla na jednotku délky je modulem pružnosti úměrná poměrnému zkrácení měkké tkáně). Bude proto platit

$$f_a = \frac{k}{h} w_a = -\frac{k}{h} (\Delta - \operatorname{tg} \alpha x), \quad f_b = -\frac{k}{h} (\Delta - \operatorname{tg} \beta x') \quad (2)$$

kde k je konstanta úměrnosti a h je tloušťka stlačované měkké tkáně. Deformace Δ, α, β určíme z vodorovné součtové podmínky rovnováhy sil působících na nohu a rovnosti momentu síly F a momentu zatížení na nohu ke kloubu

$$\int_0^a f_a dx + \int_0^b f_b dx' = 0 \quad (3)$$

$$Fe = \int_0^a x f_a dx, \quad Fe = \int_0^b x' f_b dx' \quad (4)$$



Obr. 5. Noha v ortéze. Obr. 6. Schéma působení ortézy, zatížení a deformace ortézy.

Označíme

$$p_0 = \int_0^a \frac{dx}{h}, \quad p'_0 = \int_0^b \frac{dx'}{h} \quad (5)$$

$$p_1 = \int_0^a x \frac{dx}{h}, \quad p'_1 = \int_0^b x' \frac{dx'}{h} \quad (6)$$

$$p_2 = \int_0^a x^2 \frac{dx}{h}, \quad p'_2 = \int_0^b x'^2 \frac{dx'}{h} \quad (7)$$

Hodnoty integrálů (5) až (7) určíme numericky, např. Simpsonovou formulí

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{\Delta x}{3} (f_a + 4f_1 + 2f_2 + \dots + f_b) \quad (8)$$

Tloušťku měkké tkáně mezi naměřenými hodnotami je vhodné počítat kvadratickou interpolací, tzn. pro hodnoty h_{i-1} , h_i , h_{i+1} vzdálené Δ_1 , Δ_2 a pro souřadnici t od bodu h_i interpolujeme vztahem

$$h = at^2 + bt + h_i$$

kde

$$a = \frac{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}(h_{i+1} - h_i) + h_{i-1} - h_i}{\Delta_1\Delta_2 + \Delta_1^2}, \quad b = \frac{\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^2(h_{i+1} - h_i) - h_{i-1} + h_i}{h_1 + \frac{h_1^2}{h_2}}$$

Dosadíme (2), (5), (6), (7) do (3) a (4)

$$-k[\Delta p_0 - tg\alpha p_1 + \Delta p'_0 - tg\beta p'_1] = 0 \quad (9)$$

$$-k(\Delta p_1 - tg\alpha p_2) = Fe \quad (10)$$

$$-k(\Delta p'_1 - tg\beta p'_2) = Fe \quad (11)$$

Z rovnic (8) až (11) vyjádříme Δ , $tg\alpha$, $tg\beta$

$$\Delta = \frac{Fe\left(\frac{p_1}{p_2} + \frac{p'_1}{p'_2}\right)}{k\left(p_0 + p'_0 - \frac{p_1^2}{p_2} - \frac{p_1'^2}{p_2'}\right)} \quad (12)$$

$$tg\alpha = (Fe + \Delta p_1) \frac{1}{p_2} \quad (13)$$

$$tg\beta = (Fe + \Delta p'_1) \frac{1}{p'_2} \quad (14)$$

Nyní musíme určit konstantu úměrnosti k . Vypočteme nejdříve hodnoty integrálů p_0 , p_1 , p_2 , p'_0 , p'_1 , p'_2 podle (5) až (7). Po nasazení ortézy na nohu dítěte změříme posun Δ , vzorec pro k získáme ze vztahu (12)

$$k = \frac{Fe\left(\frac{p_1}{p_2} + \frac{p'_1}{p'_2}\right)}{\Delta\left(p_0 + p'_0 - \frac{p_1^2}{p_2} - \frac{p_1'^2}{p_2'}\right)}$$

Event. změříme změnu úhlu tibio – femurálního úhlu, tzn. změnu natočení dvou částí ortézy $\alpha + \beta$ (přibližně předpokládáme, že pro malé úhly je $tg(\alpha + \beta)$ roven $tg\alpha + tg\beta$) a hodnotu Δ vyjádříme ze vztahů (13), (14)

$$k = \frac{Fe}{tg\alpha + tg\beta} \left[\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2} + \frac{\left(\frac{p_1}{p_2} + \frac{p'_1}{p'_2}\right)^2}{p_0 + p'_0 - \frac{p_1^2}{p_2} - \frac{p_1'^2}{p_2'}} \right]$$

Vypočteme Δ , $tg\alpha$, $tg\beta$ podle vztahů (12) až (14) a pak podle vztahů (2) určíme průběh zatížení nohy ortézou. Předpokládáme, že zatížení nohy ortézou nepřenáší svaly, ale pouze kost, Vypočtené zatížení proto bude zatížením kosti

4. NAPĚTÍ V KOSTI

Napětí je počítáno metodou konečných prvků a pro kontrolu je kost řešena jako prismatický prut podle Navier – Bernouliovy hypotézy. Uvedme si pouze řešení podle teorie prutů. Podle statického modelu kosti na obr. 5 a vztahu (2) pro zatížení kosti určíme ohybový moment v místě x části a resp. x' v části b

$$M_a(x) = \int_x^a (\xi - x) f_a d\xi$$

$$M_b(x') = \int_{x'}^a (\xi - x') f_b d\xi$$

Při integraci opět použijeme Simsonovou formuli (8). Dále určíme napětí v průřezech podle vztahu

$$\sigma_x = \frac{My}{I}$$

4. ZÁVĚR

Podle popsaného algoritmu byl sestaven program pro počítač. Jako vstupní data programu je použit datový soubor popisující anatomický tvar femuru a soubor pro anatomický tvar tibie. Z klávesnice se zadávají rozměry ortézy, dále délka a tloušťka tibie a femuru ošetřovaného dítěte. Ortéza bývá nejčastěji přikládána od stehna po lýtko, pak se počítá napětí ve femuru i v tibii. Mohou být použity ortézy, které zatěžují pouze femur nebo pouze tibii. Program nejdříve transformuje vzorovou kost podle skutečných rozměrů kostí naměřených na dítěti, tzn. ve směru délky kosti podle délky kosti skutečné a vzorové, v příčném směru podle průměrů uprostřed.

Při použití metody konečných prvků počítačový program připraví zadání prvků a styčníků a při řešení podle teorie prutů se podle algoritmu popsaného v kap. 2 vypočtou momenty setrvačnosti a průřezové moduly v jednotlivých částech kostí. Dále se podle algoritmu popsaných v kap. 3 se určí zatížení kosti. Napětí se řeší metodou konečných prvků nebo se podle kap. 4 počítá ohybový moment a extrémní napětí v jednotlivých průřezech.

Pro sérii testovaných pacientů bude v rámci grantu GAČR 106/00/0006 „Funkční adaptace a patobiomechanika končetinového a axiálního skeletu při silových účincích sledována závislost remodelace končetin pacientů na době působení ortéz a vypočtených hodnot napětí. Zatížení nohy ortézou bude zjišťováno též experimentálně, do ortéz budou vkládány vrstvy zaznamenávající průběh zatížení v ploše.

5. LITERATURA

- [1] Adam M.: Klinika a diagnostika osteoporosy, Compendium osteoporosy – chirurgie osteoporotické kosti, soubor přednášek, Společnost pro výzkum a využití pojivových tkání.

- [2] Cowin S.C.: Bone - Stress Adaptation Models. Journal of Biomechanical Engineering, r. 115, November 1993, s.528-534
- [3] Cowin S.C. at al.: Bone Remodeling OF Diaphyseal Surface by Torsion Loads. Journal of Biomechanical Engineering, 20, 1987, s. 1111-1120
- [4] Cowin S.C., Nachlinger R.R.: Bone remodeling III: Uniqueness and stability elasticity theory. Elasticity, r. 8, č. 3, 1979, s.285-295
- [5] Černý P., Mařík I., Zubina P., Hadraba I.: Aplikace ortotiky jako prostředku technické rehabilitace u kostních displasií. Pohybové ústrojí, r.5/1998, č.3+4, s.145-151
- [6] Dvořák I., Maršík F., Andraj L.: Biomechanika, Academia, Praha 1982
- [7] Hasegawa T., Kozłowski K., Nishimura G., Hara H., Hasegawa Z., Aso T., Koto S., Nagai T., Tshuchiya Z.: Spondylo – Metaphyseal Dysplasia with Regeasive Platyspondyly. Pohybové ústrojí, r.6/1999, č.1 s.53-59
- [8] Janíček P.:Biomechanické problémy ortopedie, možnosti a bariéry jejich řešení. Pohybové ústrojí, r.6/1999, č.2, s.84-105
- [9] Sobotka Z.: Biomechanické funkce dolních končetin a chodidel. Pohybové ústrojí, r.4/1997, č.3, s. 28-37.